

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra inż. Adama Kajzera pt.  
**Modelling of interfacial flows with diffuse-interface method using weakly compressible approach.**

## 1. Ogólna struktura pracy

Recenzowana rozprawa doktorska napisana jest w języku angielskim, liczy 116 stron, a na jej treść składają się cztery rozdziały. Bibliografia zawiera 92 pozycje. W pięciu z nich kandydat występuje w roli pierwszego autora.

## 2. Tematyka i cel pracy

Rozprawa doktorska mgra inż. Adama Kajzera (dalej zwanego Kandydatem) poświęcona jest zagadnieniom modelowania matematycznego i komputerowego ruchu ośrodka ciągłego złożonego z dwóch (lub więcej) nie miesających się płynów. Problematyka ta znajduje się od lat w centrum zainteresowania zarówno teoretycznej jak i – a może nawet przede wszystkim – obliczeniowej mechaniki płynów. O tym, jak wielkim wyzwaniem jest dla tej ostatniej skuteczne (tj. wiernie odtwarzające fizykę zjawisk, a jednocześnie efektywne obliczeniowo) modelowanie ruchu takiego ośrodka świadczy fakt współistnienia wielu metod i podejść, z których każda ma swoje mocne i słabe strony. Należy zresztą przyznać, że podobna sytuacja występuje także w innych zagadnieniach obliczeniowej mechaniki płynów.

Cechą wyróżniającą modelowanie komputerowe płynów wieloskładnikowych jest konieczność śledzenia powierzchni rozdziału (interfejsu) pomiędzy różnymi składnikami. Wyznaczanie chwilowego położenia tego interfejsu jest niezbędne ze względu na to, że jest on a priori nieznaną granicą obszarów, w których parametry fizyczne płynów składowych, takich jak gęstość, lepkość, współczynniki przewodnictwa ciepła, są różne, nierzadko drastycznie różne. Aktualnie, istnieje szereg różnych metod wyznaczania położenia (i ruchu) powierzchni interfejsu, które sprzęgane są z równaniami różniczkowymi wynikającymi z zasad zachowania. Do najważniejszych metod, klasyfikowanych ogólnie jako metody typu „interface capturing” należą metody VoF (ang. Volume of Fluid, w wariacie algebraicznym i geometrycznym), metody typu LS (ang. Level Set), metody PFM (anf. Phase Field Models) oraz – rozważana w rozprawie – metoda DI (diffuse interface), będąca de facto odmianą metody PFM. Każde w wymienionych podejść na pewne słabości, które mogą mieć charakter bardziej fundamentalny (jak np. problemy z zachowaniem masy płynu) i/lub operacyjny (trudności z efektywną implementacją numeryczną). Każde wymienionych podejść jest przedmiotem intensywnego

rozwoju, o czym świadczy nieustannie rosnąca liczba wariantów i poświęcanych im publikacji. Rozwój ten stymulowany jest także potrzebami praktycznymi, jako, że zagadnienia dynamiki przepływów wieloskładnikowych są wszechobecne w wielu zastosowaniach technicznych, by wymienić takie problemy jak rozpylanie cieczy, zjawiska zmiany fazy (w tym wrzenia), procesy nasycania cieczy frakcją gazową, procesy spalania i inne.

**W świetle aktualnych kierunków rozwoju mechaniki płynów i specyficznych dla niej metod obliczeniowych, a także potrzeb wynikających z zastosowań praktycznych, mogę zatem stwierdzić bez wahania, że tematyka podjęta w rozprawie jest aktualna i wpisuje się we współczesne trendy rozwojowe dziedziny.**

Nieodłącznym elementem modelu matematycznego ruchu płynu wieloskładnikowego są równania różniczkowe wyrażające zasady zachowania/zmienności podstawowych wielkości fizycznych: masy, pędu i energii. W przypadku przepływów cieczy lub gazu z niewielkimi liczbami Macha, naturalnym wyborem modelu wydaje się być model ośrodka nieściśliwego. Matematyczny opis tego modelu stanowi układ równań złożony z równania Naviera-Stokesa i równania ciągłości. Równanie ciągłości może być zastąpione równaniem Poissona dla pola ciśnienia z odpowiednio sformułowanymi warunkami brzegowymi. Otrzymany w ten sposób system równań jest paraboliczno-eliptyczny. Należy podkreślić, że w modelu nieściśliwym ciśnienie traci swój termodynamiczny charakter będąc w istocie polem „mnożnika Lagrange’a” potrzebnego do zrealizowania warunku zerowej dywergencji nałożonego na pole prędkości. Warunek brzegowy dla ciśnienia jest warunkiem Neumanna, który jest warunkiem naturalnym dla równania Poissona i – po przeformułowaniu problemu do formy uogólnionej – może być nałożony „międko” przy użyciu standardowych przestrzeni MES-owskich (z ograniczeniami wynikającymi w warunku stabilności LBB). Rozwiązanie zagadnienia niestacjonarnego może być otrzymane na wiele sposobów. Typowo, w każdym kroku czasowym wyznaczanie nowego pola prędkości i nowego pola ciśnienia wykonywane jest w dwóch podetapach, co skutkuje niespełnieniem warunku zerowej dywergencji. Remedium na to może być wykonanie wewnętrznych iteracji. Znane są metody, w których błąd dywergencji znajduje się pod kontrolą zastosowanego kroku czasowego z rzędem równym rzędowi zastosowanego schematu całkowania. Nie zmienia to faktu, że w każdym kroku czasowym zachodzi potrzeba rozwiązania równia Poissona dla ciśnienia. W przypadku zagadnień przepływowych w złożonych geometriach, czas wyznaczenia tego rozwiązania może być znaczny i decyduje o całkowitej efektywności solwera.

Opisane trudności można przezwyciężyć stosując alternatywne metody podpadające pod kategorię metod sztucznej ściśliwości. W metodach tych warunek zerowej dywergencji zastępowany jest sztucznych, ewolucyjnym równaniem dla ciśnienia. Typowo, równanie to postulowane jest w takiej formie, że w przypadku stacjonarnym jest ono równoważne oryginalnemu warunkowi  $\text{div}(\mathbf{V}) = 0$ . W przypadku niestacjonarnym stosowany jest trik z całkowaniem w pseudo-czasie wewnątrz każdego kroku całkowania względem czasu fizycznego. Otrzymany układ równań jest teraz paraboliczno-hiperboliczny i może być całkowany en bloc metodami jawnymi. Oczywiście, wymagane jest dołączenie warunków

brzegowych dla ciśnienia. Warto wspomnieć, że istnieją metody, które wprowadzają efekt sztucznej ściśliwości na etapie po dyskretyzacji jako efekt uproszczenia oryginalnie otrzymywanego układu algebraicznego rozwiązywanego w każdym kroku symulacji. Przykładem takiej metody jest np. metoda Yosidy.

Inną alternatywą jest – zastosowana przez Kandydata rozprawy – metoda słabej ściśliwości (*weak compressibility method*). W klasycznej wersji metoda ta polega na połączeniu w jeden układ ogólnego równania zachowania masy, równania ruchu w formie dla płynu nieściśliwego (ale występująca w nim gęstość jest teraz zmienna) oraz uproszczonego równania energii zapisanego jako równanie ewolucji dla pola ciśnienia. Z założenia, przepływ opisany tym modelem jest (lekko) ściśliwy, co oznacza, że na mocy samej konstrukcji modelu dywergencja pola prędkości różni się od zera, nawet jeśli przepływ jest ustalony. Podobnie jak w przypadku sztucznej ściśliwości, sformułowanie to eliminuje eliptyczność zagadnienia dla ciśnienia.

W pracy z 2013 r. Clausen zaproponował uogólnienie metody słabej ściśliwości, znane pod nazwą EDAC (ang. *entropically damped artificial compressibility*) (Kandydat rozprawy zasadnie stwierdza, że bardziej adekwatną nazwą byłaby „*entropically damped weak compressibility*”, w skrócie EDWC). Na poziomie „operacyjnym” istota metody EDAC sprowadza się do wprowadzenia do równania dla ciśnienia dodatkowego składnika dyfuzyjnego, tj. zawierającego laplasjan ciśnienia pomnożony przez lepkość płynu. Ten, de facto sztuczny, zabieg zmienia charakter równia na paraboliczny, wprowadza również mechanizm tłumienia akustycznych fluktuacji ciśnienia (co jest korzystne, jako, że w modelu idealnie nieściśliwym, zaburzenia takie po prostu nie istnieją). Metoda EDAC (EDWC) stanowi punkt wyjścia w rozważaniach przedstawionych w rozprawie.

Podstawowym celem, który postawił przed sobą Kandydat było opracowanie nowej metody opisu i symulacji ruchu ośrodka złożonego z dwóch nie mieszających się płynów, bazującej na metodzie słabej ściśliwości EDAC jako solverze przepływowym i metodzie rozmytego interfejsu (DI) jako sposobu wyznaczania chwilowego położenia powierzchni rozdziału pomiędzy płynami. Zamiarem Kandydata było również opracowanie efektywnej obliczeniowo implementacji tej metod, w wykorzystaniem najnowszych technologii komputerowych (programowanie w środowiska CUDA, masywne zrównoleglenie obliczeń w wykorzystaniem procesorów graficznych), a następnie przetestowanie poprawności oraz właściwości (w szczególności mocnych i słabych stron) opracowanej metodologii na zestawie odpowiednio dobranych przypadków testowych i porównanie otrzymanych wyników w wynikami otrzymanymi przez innych badaczy (innymi metodami).

Aby osiągnąć postawiony cel, Kandydat musiał rozwiązać cały szereg trudnych problemów związanych z odpowiednim doбором dyskretyzacji przestrzennej i schematu całkowania po czasie równań rządzących ruchem ośrodka. Musiał również podjąć szereg nieoczywistych wyborów dotyczących parametrów metody, dbając o to, aby wybory te były w jak największym stopniu oparte na argumentach fizykalnych. Wreszcie, Kandydat przeprowadził bardzo

obszerną i systematyczną analizę porównawczą swoich wyników w wynikami innych badaczy, starając się uzasadnić racjonalnie i obiektywnie zaobserwowane rozbieżności.

**Biorąc pod uwagę wartość naukową i znaczenie podjętego zadania dla rozwoju metod modelowania i symulacji przepływów wielofazowych, a także stopień złożoności zagadnienia zarówno pod względem teoretycznym, algorytmicznym i programistycznym, stwierdzam, że problem naukowy podjęty i rozwiązany przez Kandydata spełnia – i to w nadmiarze - warunki zwyczajowo stawiane zagadnieniom mogącym być przedmiotem rozprawy doktorskiej.**

### **3. Zawartość merytoryczna pracy i jej ocena**

Podstawy cel naukowy rozpraw Kandydat realizuje w dobrze zdefiniowanych i opisanych w kolejnych rozdziałach pracy etapach.

W Rozdziale 2 rozprawy Kandydat formułuje metodę EDAC, dla płynu jednoskładnikowego. Podane zostały równania rządzące dynamiką ruchu takiego płynu w formie zachowawczej. Kandydat zwraca uwagę na paraboliczny charakter równania dla pola ciśnienia, także na brak arbitralnych parametrów w tym równaniu (jak to ma miejsce np. w odpowiednim równaniu w typowych metodach sztucznej ścisłości). Następnie Kandydat przechodzi do szczegółowego omówienia przypadku testowego, którym jest przepływ turbulentny w kanale trójwymiarowym. Kandydat zakłada okresowość pola prędkości wzdłuż kanału oraz w kierunku poprzecznym równoległym do płaskich ścian. Ruch napędzany jest stałym ujemnym gradientem ciśnienia wzdłuż kanału. Kandydat porusza tu kwestię warunku brzegowego postawionego na ścianie kanału dla ciśnienia, podaje również analityczną formę warunków początkowych dla pola prędkości. Następnie przechodzi do mówienia dyskretyzacji przestrzennej opartej na wykorzystaniu różnic skończonych. W kierunkach okresowości pola przepływu siatka jest równomierna, w kierunku prostopadłym do ścian kanału jest gęstość jest zmienna tak, aby uzyskać właściwą rozdzielczość w sąsiedztwie materialnego brzegu obszaru. Kandydat zawarł szczegółowy opis formuł różnicowych dla poszczególnych składników równań rządzących przepływem. Zwraca również uwagę na konieczność użycia skośnie symetrycznej formy członu konwekcyjnego w równaniu ruchu. Pokazuje również numeryczną realizację warunku brzegowego dla ciśnienia. Warunek ten oparty jest na zredukowanej formie równania ruchu „zapisanego na brzegu”. Przy tej okazji zwraca uwagę na fakt, że próba zastosowania „naiwnego” warunku Neumanna dla ciśnienia prowadzi do niewłaściwego zachowania rozwiązania. Warto nadmienić, że analiza tego warunku w kontekście metod dla modelu nieściśliwego prowadzi do podobnych wniosków (brzegowa warstwa błędu pola dywergencji nie może być wyeliminowana przez zagęszczanie siatki). Kandydat uzasadnia też w przekonujący sposób wybór schematu całkowania po czasie.

W dalszej części Rozdziału 2 Kandydat prezentuje wyniki obliczeń dla dwóch przypadków liczby Reynoldsa dobranych tak, aby możliwe było porównanie wyników z wynikami innych autorów. Porównaniu podlegają statystyki przepływu pierwszego i drugiego rzędu otrzymane

w wyniku uśredniania po czasie w ramach jednej długiej symulacji. Zgodność w wynikami z literatury jest znakomita, niewielkie odchyłki można równie dobrze złożyć na karb niedoskonałości metod prowadzących do otrzymania wcześniejszych wyników referencyjnych. Wyniki te dowodzą jednoznacznie poprawności modelowania metodą słabej ściśliwości, a także numerycznej efektywności autorskiej implementacji tej metody.

Następny etap pracy Kandydat opisał w Rozdziale 3. Opracowany wcześniej solver EDAC jest tu rozszerzony o możliwość zastosowania do przepływu wieloskładnikowego, którego składniki zajmują podobzary rozdzielone powierzchniami rozdziału ewoluującymi w trakcie ruchu ośrodka. Rozszerzenie EDAC o model ruchu tych powierzchni polega na zastąpieniu „zwykłego” równania zachowania masy, równaniem wynikającym z metody DI. W pierwszym kroku Kandydat przedstawia oryginalną koncepcję tego modelu jako prawa ewolucji dla skalarnego pola funkcji-wskaźnika fazy. Podejście polega na wykorzystaniu zachowawczego wariantu równania ewolucji dla tego pola (będącego wariantem równania Allena-Cahna). Równanie to zawiera dwa swobodne parametry: parametr ruchliwości i parametr rozmycia interfejsu. W tym miejscu Kandydat dyskutuje kwestię właściwego doboru parametru ruchliwości i jego powiązania z charakterystyczną skalą prędkości. Temat ten przewija się nieustannie przez dalszą część pracy, jako, że właściwy wybór tego parametru jest kluczowy dla uzyskania poprawnych fizycznie wyników symulacji.

W ramach modelu DI równanie dla funkcji-wskaźnika fazy jest ostatecznie przekształcone w równia dla gęstości płynu i dołączone jakie jedni z równań systemu. W kontekście metody słabej ściśliwości pojawia się tu problem нефизичnej ujemnej gęstości, co wymaga pewnych dodatkowych zabiegów. Kandydat przedstawia również argumenty za wprowadzeniem zmiennej wartości prędkości dźwięku i parametru ruchliwości, w zależności od maksymalnej prędkości płynu w obszarze.

W proponowanym podejściu, człon dyfuzyjny w równaniu ewolucji dla pola ciśnienia w obszarze rozmytego interfejsu jest wyłączany (odpowiedni argument jest podany na początku strony 44 rozprawy), co – przy zastosowania centralnego schematu różnicowego skutkuje pojawieniem się нефизичnych oscylacji w polu ciśnienia. Remedium na tę bolączkę jest zastosowanie innego schematu dyskretyzacji (schemat Kurganowa-Tadmora typu upwind, w sformułowaniu objętości skończonych). Szczegóły zmodyfikowanego podejścia do dyskretyzacji Kandydat podał w punkcie 3.3.1. Do całkowania równań w czasie Kandydat stosuje wariant metody Rungego-Kutty 2-ego rzędu. Obszernie dyskutuje również kwestię doboru kroku czasowego, uwzględniając różne ograniczenia wynikające ze współlistnienia konwekcji, dyfuzji oraz efektów związanych z generacją fal kapilarnych.

W dalszej części rozdziału 3 Kandydat poddaje zaproponowaną metodę obszernym testom numerycznym. W pierwszej kolejności badana jest poprawność metody numerycznej dla równania DI. W tym celu wykonywany test zachowania kształtu interfejsu. Badane jest efekt deformacji wywołany różnymi sposobami wyznaczania nieliniowej części strumienia w równaniu DI, a także wpływ limiterów strumienia użytych w obliczaniu członu adwekcyjnego.

Konkluzja jest oczywista i wskazuje na najlepszy wybór w obu aspektach. pokazuje również zachowanie metody w bardziej złożonym przypadku testowym (test Ridera-Kothe).

Badanie własności metody numerycznej dla równań samego modelu EDAC Kandydat przeprowadza na przykładzie następujących przypadków testowych: zderzenie pary kropli wody w powietrzu, stacjonarna kropla wody w powietrzu (test w celu zbadania artefaktu „fałszywych” strumieni (and. spurious currents), niecentralne zderzenie kropeł węglowodanu w azocie.

W Rozdziale 4 Kandydat mierzy się ze sposobem pokonania trudności i ograniczeń modelu zaproponowanego w Rozdziale 3. Najpierw podsumowuje zauważone problemy, w szczególności brak zbieżności do stanu ustalonego, brak zaniku fałszywych strumieni ze wzrostem gęstości siatki, a także pojawianie się nie fizycznych efektów w symulacjach zderzenia kropeł. Zwraca również uwagę na nadmierną dyssypację numeryczną w obszarach ruchu poza interfejsem pomiędzy fazami.

W celu eliminacji, czy chociaż ograniczenia niepożądanych efektów, Kandydat proponuje szereg modyfikacji pierwotnego modelu i metody obliczeniowej. W szczególności, proponuje użycie pełnego równania ruchu dla ściśliwego płynu newtonowskiego i rezygnuje w wyłączenia składnika dyfuzyjnego w równaniu ciśnienia w obszarze rozmytego interfejsu, co uzasadnia zamiarem użycia innego schematu dyskretyzacyjnego charakteryzującego się niższą lepkością numeryczną. Zmianie podlegają również definicja prędkości dźwięku i współczynnika ruchliwości gamma.

W aspekcie metody obliczeniowej Kandydat proponuje inny schemat całkowania w czasie, lepiej dostosowany do warunków przepływowych w otoczeniu interfejsu. Zmiana ta ma umożliwić zwiększenie kroku całkowania przy zachowaniu stabilności i odpowiedniej dokładności. Kandydat proponuje również modyfikację algorytmu identyfikacji położenia interfejsu na mniej czułą na lokalną zmienność gęstości faz ośrodka, wynikającą z potraktowania ich jako płyny o niewielkiej ściśliwości. Do hiperbolicznej części równań Kandydat stosuje tym razem solver Riemanna w wariacie HLLC, co pozwala na uwzględnienie zjawisk falowych w obszarze interfejsu, a jednocześnie na zmniejszenie lepkości numerycznej. Bardziej wyrafinowanym zastąpiony został również sposób uwzględnienia napięcia powierzchniowego, co ma skutkować poprawą zachowania symetrii oraz ograniczyć intensywność fałszywych strumieni. Kandydat proponuje również ulepszony algorytm do rozwiązywania równania ciśnienia, a także uogólnia ciśnieniowy warunek brzegowy.

Pozostałą część Rozdziału 4 Kandydat poświęca testom numerycznym mającym dowieść wystąpienia przewidywanej poprawy wyników symulacji testowych. Przedstawione rezultaty dowodzą, że poprawa ta istotnie ma miejsce, choć eliminacja niepożądanych i nie fizycznych efektów nie jest całkowita. Kandydat przedstawia efekt ograniczenia fałszywych strumieni i spadek maksymalnej prędkości tych strumieni wraz ze wzrostem gęstości siatki. Test zderzenia kropeł pokazuje znaczące ograniczenie efektu uwięzienia bąbli gazu wewnątrz fazy ciekłej.

Lepszej jakości wyniki uzyskał Kandydat również dla przypadku przepływu uwarstwionego przepływu Poiseuille'a. Przeprowadzone testy pozwalają ocenić także wpływ różnych parametrów na jakość rozwiązania. Bardzo interesującymi i trudnymi przypadkami testowymi są symulacja niestabilności Rayleigha-Taylora oraz symulacja ruchu bąbla gazowego w cieczy wywołana siłą wyporu. W obu przypadkach obliczone charakterystyki tych przepływów wykazują dobrą zgodność z wynikami zaczerpniętymi z literatury. Z drugiej strony, Kandydat zauważa i komentuje zaobserwowane efekty dowodzące, że rozdzielczość przestrzenna jego symulacji nadal nie jest wystarczająca do poprawnego oddania drobnoskalowej struktury interfejsu pomiędzy fazami.

W końcowej części rozdziału Kandydat komentuje krótko wpływ zaproponowanych modyfikacji na efektywność obliczeniową. Okazuje się, że jest on znaczący bowiem utrudnia masywne zrównoleglenie obliczeń z użyciem kart graficznych (GPU). Kandydat wyraża przekonanie, że nowe technologie obliczeniowe, w szczególności nowa generacja wielowątkowych procesorów firmy AMD będzie skutecznym remedium na opisany problem.

W ostatnim rozdziale pracy Kandydat krótko podsumowuje swoje osiągnięcia, a także przedstawia perspektywę dalszych badań i usprawnień modelu i metody obliczeniowej stanowiących tematykę rozprawy.

Przechodząc do podsumowania i oceny pracy stwierdzam, że Pan Adam Kajzer podjął się ramach rozprawy doktorskiej bardzo ambitnego i złożonego problemu badawczego, którego rozwiązanie wymagało opanowania obszernego materiału teoretycznego zarówno w zakresie mechaniki płynów wielofazowych jak i szerokiego repertuaru metod numerycznych. Efektem tego jest widoczna w pracy świetna znajomość aktualnego stanu badań w dziedzinie numerycznego modelowania przepływów wielofazowych. Dobre rozeznanie w mocnych i słabych stronach rozmaitych metod symulacji takich przepływów pozwoliło na ukierunkowanie badań, właściwe sformułowanie ich celu i – w efekcie – uzyskanie wyników stanowiących istotny wkład w rozwój metod obliczeniowej mechaniki płynów. W trakcie realizacji postawionych celów Kandydat dowiódł zdolności do formułowania i rozwiązywania problemów w zakresie modelowania matematycznego zjawisk fizycznych jak i wyboru lub tworzenia odpowiednich metod obliczeniowych. Dowiódł też świetnego opanowania metodologii zastosowania symulacji komputerowych, przeprowadzając obliczenia dla właściwie wybranych przypadków testowych, a następnie krytycznie oceniając uzyskane wyniki. Fakt ten świadczy bardzo pozytywnie o dojrzałości naukowej Kandydata i jego predyspozycjach do pracy badawczej. O wysokiej jakości badań prowadzonych przez Kandydata świadczy także fakt, że ma On na koncie szereg publikacji, m.in. w prestiżowych *Computational Mathematics with Applications* i *Flow, Turbulence and Combustion*.

**Biorąc zatem pod uwagę stopień złożoności rozwiązanego problemu badawczego oraz jakość i oryginalność uzyskanych przez Kandydata wyników mogę bez wahania stwierdzić, że przedłożona rozprawa może być podstawą do ubiegania się przez mgra inż. Adama Kajzera o nadanie mu stopnia naukowego doktora nauk technicznych.**

#### 4. Uwagi dotyczące języka, terminologii i poziomu edytorskiego pracy

Praca napisana jest poprawny językiem, logicznie i klarownie. Terminologia stosowana przez Kandydata jest poprawna. Kandydat używa pewnej liczby skrótów i – choć generalnie nie utrudnia to lektury pracy – nie zaszkodziłoby zamieszczenie ich listy na początku pracy. Praca nie zawiera również spisu rysunków i tabel, ale nie jest to istotne uchybienie.

Poziom edytorski pracy jest bez zastrzeżeń. Wykresy i rysunki, w szczególności mapy konturowe, są czytelne i odpowiednio podpisane.

#### 5. Szczegółowe uwagi krytyczne i polemiczne. Pytania do Kandydata.

Nie licząc pewnych powtórzeń pojawiających się w początkowych fragmentach rozdziałów 1, 2 i 3 przebieg wywodów w pracy nie budzi zastrzeżeń. Zauważyłem drobne błędy we wzorach wynikające niewątpliwie z przeoczenia, a mianowicie niewłaściwy operator różniczkowy stojący w członie dyfuzyjnym w równaniach (1.23) i (1.24) – powinien tam być skalarny laplasjan, a nie gradient.

Proszę Kandydata o wyjaśnienie w trakcie obrony następujących kwestii:

1. Nie jestem pewien, czy dobrze zrozumiałem sposób w jaki wykorzystane jest w modelu równanie stanu. Jeżeli kwadrat prędkości dźwięku to po prostu iloraz ciśnienia i gęstości fazy to z równania dla ciśnienia (3.5) można wywnioskować, że ciśnienie jest tu wielkością zachowawczą. W szczególności, jeśli pominąć człon dyfuzyjny, to równanie to implikuje, że całka po obszarze płynnym z ciśnienia jest niezmienna w czasie. Proszę o komentarz.
2. Kłopoty z dostateczną rozdzielczością przestrzenną metody w okolicy interfejsu można by pokonać stosując dynamiczną adaptację siatki. Jak Pan widzi możliwość wprowadzenia takiej adaptacji? Jakie kryterium adaptacji można by zastosować? Jaki wpływ miałoby wprowadzenie adaptacji na inne parametry metody (np. dobór kroku czasowego) oraz na możliwość zrównoleglenia obliczeń?
3. Jednym w często stosowanych wariantów warunków brzegowych stawianych dla „nieściśliwego” równania Naviera-Stokesa są tzw. warunki otwarte, stosowane szczególnie często na wylocie lub wylotach w przewodów. Czy istnieje możliwość postawienia analogicznych warunków w przypadku sformułowania „słabo ściśliwego”?

#### 6. Wniosek końcowy

Podsumowując, stwierdzam, że przedłożona przez mgr inż. Adama Kajzera rozprawa doktorska pt. *Modelling of interfacial flows with the diffuse-interface method using weakly compressible approach* spełnia całkowicie wymagania stawiane rozprawom doktorskim sformułowane w ustawie o stopniach naukowych i tytule naukowym i może stanowić podstawę nadania Kandydatowi pracy stopnia doktora nauk technicznych w dyscyplinie Mechanika (lub Inżynieria Mechaniczna). Praca przedstawia oryginalne i interesujące poznawczo wyniki badań

Kandydata w zakresie modelowania komputerowego przepływów wielofazowych. Wyniki te posiadają w moim przekonaniu niezaprzeczalny walor nowości naukowej. **Wnioskuje zatem o dopuszczenie mgra inż. Adama Kajzera do publicznej obrony przedłożonej rozprawy.**

Oceniam ponadto, że zarówno poziom złożoności problemu podjętego w rozprawie oraz stopień zaawansowania metod zastosowanych do jego rozwiązania znacząco przekraczają typowy poziom prac doktorskich w w/w dyscyplinie. O wysokiej jakości badań naukowych prowadzonych przez mgra inż. Adama Kajzera świadczą publikacje w renomowanych czasopismach z listy JCR. Tematyka badań prowadzonych przez mgra inż. Adama Kajzera wpisuje się z główne trendy rozwojowe obliczeniowej mechaniki płynów, co dobrze rokuje dalszej karierze naukowej Kandydata. Z tych powodów **wnioskuję o wyróżnienie rozprawy doktorskiej mgra inż. Adama Kajzera.**

Jacek Szumbariski

