

ISSN 0239-9091

Michał Karcz, Janusz Badur

Numeryczna implementacja modelu racjonalnej turbulencji

531/1490/2003

Zeszyty Naukowe
Instytutu Maszyn Przepływowych w Gdańsku

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego KBN PB 1733/T10/20/19

Recenzent

dr hab. inż. Jerzy M. Sawicki, Politechnika Gdańska

Numeryczna implementacja modelu racjonalnej turbulencji

Michał Karcz, Janusz Badur¹

Praca dotyczy rewaloryzacji modelu racjonalnej turbulencji opracowanego w latach 1940 – 1955 przez Michała Broszko. Dokonano ponownego wyprowadzenia równań we współczesnym zapisie, przeinterpretowano stałą wektorową modelu i zapisano model 3D w postaci zachowawczej. Następnie model w wersji 2D zaimplementowano oraz wykonano sprawdzające obliczenia. Na benchmarkowym przykładzie dokonano obliczeń i porównań modelu racjonalnej turbulencji z standardowym modelem dwurównaniowym.

1 Wstęp - Główne motywacje

Racjonalizm wsparciem dla empiryzmu? Termomechanika płynów będąc nauką okrzepłą i w pełni ukształtowaną, w dużym stopniu bazuje na zależnościach i formułach pochodzenia empirycznego. Przez formuły i wzory empiryczne rozumiemy wzory wyprowadzone bezpośrednio z pomiaru zjawiska, określone w pewnym zakresie, bez uzasadnienia teoretycznego i bez względu na związek z innymi zjawiskami. Na wzorach empirycznych można polegać w zakresie, do którego stosują się pomiary, a ekstrapolacja ich zastosowania poza ów obręb jest niezwykle niebezpieczna.

Powszechnym jest pogląd, iż wszystkie wzory i prawa termomechaniki płynów są naturalnie ostatecznie pochodzenia empirycznego. To stwierdzenie uwypukla pewne przeciwieństwo, brane czasami pod uwagę, którym są **wzory i prawa racjonalne**, czyli takie które są uzasadnione rozumowo za pomocą narzędzi takich jak logika i matematyka. Wzory racjonalne są zatem przede wszystkim wynikiem dedukcyjnej metody rozumowania. W termomechanice wzory racjonalne, od lat miały swój własny, niepodległy status. Było to związane z przekonaniem, iż zasadnicze prawa termomechaniki muszą być proste, a ponieważ kształt wzorów racjonalnych zawsze jest prostszy od kształtu wzorów empirycznych, to w wielu miejscach modele i wzory racjonalne znalazły swe uzasadnienie w obrębie pomiarów wykonywanych z dostateczną niedokładnością. Dziś rozumiemy głębiej, iż

¹Institut Maszyn Przepływowych Polskiej Akademii Nauk w Gdańsku, Zakład Przepływów z Reakcjami Chemicznymi, e-mail: {mkarcz, jb}@imp.gda.pl

pełne prostoty (czytaj: liniowości) prawa Hooke'a, Ohma, Fouriera, Ficka, Darcy i im podobne oddają zaledwie prostą proporcjonalność przyczyn i skutków oraz że ich prostota w żadnym razie nie jest pochodzenia metafizycznego. Współcześnie ten paradygmat myślenia jest bazą branży, która nazywa się *racjonalna termomechanika kontinuum*.

Metoda racjonalnej termomechaniki. Niestety podejście racjonalne, tak obiecująco płodne, obciążone jest przekłętą skazą: nie może ono obejść się bez stawiania hipotez [1]. W samym stawianiu hipotez nie ma jeszcze nic złego, najnieprzyjemniejszym jest fakt, iż dopiero hipoteza jedna na milion jest zgodna z prawdą empiryczną. Z taniej i potencjalnie sprawnej metody „atakowania” rzeczywistości, racjonalna termomechanika ubrana w dziesiątki tysięcy wykluczających się hipotez, zafiksowanych w artykułach obficie wypełniających kilometry kwadratowe półek bibliotecznych, staje się balastem w procesie właściwego rozpoznawania rzeczywistości. Racjoniści, za hipotezę uważają te założenia (o charakterze matematycznym), które są przyjmowane, gdyż wydają się z góry prawdopodobne lub są przyjmowane na próbę. Hipotezy są materiałem wyjściowym do procesu dedukcji mającego doprowadzić do wniosków później (przez kogo innego) doświadczalnie sprawdzanych. Stąd też nazywa się hipotezy eksperymentami myślowymi (*Gedankenexperiment*). W latach 1960–1980 powstała niezła armia tych racjonalistów, którzy każdego dnia przetwarzali w swoim ścisłym matematycznym aparacie nową hipotezę. Racjonalista, który zmyślił już kilka hipotez układających się w tzw. całokształt nazywany był teoretykiem. Bowiem przez teorię rozumiano w tym czasie **spójny zespół hipotez** oraz otrzymany z logicznego przetworzenia również **spójny zespół wyników**. Owa „spójność” była jedynym poważnym uzasadnieniem finansowania tej pseudonauki. Nieświadomi spróchniałych korzeni swej dyscypliny, racjoniści aż do ostatniego tchu obmyślali hipotezy, a potem i wielkie teorie, oddzielając się całkowicie od rzeczywistości i faktów stwierdzanych empirycznie. Parkanem oddzielającym termomechanikę racjonalną od „gorszego towarzystwa” było owe sześć całkowicie zmyślonych zasad (szumnie zwanych aksjomatami) które miały przyspieszać erupcję hipotez i potęgować lawinę teorii [1], [14], [20], [33], [42].

Metoda empirycznej termomechaniki Empiryści byli w opozycji do racjonalistów od dawna. Przeciw bezpodstawnej spekulacji występowali jednak nieliczni - w siedemnastym wieku, gdy mania pustego matematycznego fantazjowania ogarnęła Europę, Newton protestował mówiąc - *hypotheses non fingo*. Znane są oświadczenia fenomenologisty Faradaya. Potem E. Mach i Z. Ostwald podnieśli empiryzm do rangi metody naukowej. Również i Pierre Duhem walczył o naukę wolną od hipotez i wynikających z nich twierdzeń. Wskazywał on, iż w każdym twierdzeniu termomechaniki zawarta jest niedopuszczalna ilość hipotez, których nie dostrzegamy z racji naszego do nich przyzwyczajenia się.

Empiryści nie cenią racjonalistów za naiwną wiarę w prostotę rzeczywistości, bowiem empiryści złożoność zjawisk odczuwają bezpośrednio w trakcie przeprowadzanych doświadczeń. Stąd też bierze się **pokora** w ujmowaniu wyników doświadczeń w zespół ścisłych zależności. Dawniej empiryści swoje stwierdzenia

wyrażone językiem matematyki nazywali „working theories”, tzn teorii prowizorycznych przyjętych w badaniach nowych dziedzin z pełną świadomością, iż okażą się one z czasem niewystarczające, ale na razie mogą służyć za nic przewodnią w chaosie zjawisk. Dzisiaj te „working theories” nazywa się po prostu modelem matematycznym danego zjawiska.

Operacja wyposażenia modelu matematycznego w konkretne stałe nazywa się **kalibracją modelu** i jest to niezmiernie trudna oraz pracochłonna czynność, którą empirycy cenią na równi z czynnością pomiaru liczbowego w eksperymencie. Mimo, iż modele matematyczne wykonane są z równań różniczkowo-całkowych i spokrewnionych technik matematycznych, status tych modeli był, jest i pozostanie statusem nauki fenomenologicznej. Modele matematyczne pojmujemy jako zwarty sposób ujęcia empirycznych danych, niczego nie wyjaśniający, a służący jedynie do najwygodniejszego wykorzystania wiedzy o zjawisku [35], [39], [41].

Racjonalność w mechanice płynów Według Truesdella [33] racjonalna termomechanika płynów jako sposób modelowania zjawisk rozpoczyna się od prac da Vinci, d’Alemberta, Eulera, Naviera i Cauchy, czyli pojawia się równolegle z racjonalną termomechaniką ciał stałych. Specyfiką termomechaniki płynów jest empiryczny fakt stwierdzający, iż płyny robocze nie przenoszą sprężystych odkształceń postaciowych. W związku z tym kinematyka deformacji ograniczyła się jedynie od opisanie objętościowych deformacji sprężystych, co było możliwe po użyciu wyznacznika gradientu deformacji $J = \det F$, określającego kulistą ekspansję płynu. Taki był pierwszy model płynu sprężystego opracowany przez Boyle’a i podjęty przez Rankine’a [3].

Natomiast cechą fizyczną silnie wyróżniającą płyny od klasycznych ciał stałych była ich duża lepkość odpowiedzialna za przenoszenie **lepkiego strumienia pędu**. Liniowym modelem lepkiego strumienia pędu był jednowymiarowy pierwowzór Newtona. Przejście na model trójwymiarowy okazało się nie być łatwe (w cieple stałym prowadzono podobne prace związane z rozszerzeniem jednowymiarowego modelu sprężystego Hooke’a), toteż wokół sprawy poprawnego zbudowania modelu 3D lepkiego strumienia pędu skupili się racjonałiści pierwszej połowy dziewiętnastego wieku. Początkowo, w analogii do jednowymiarowego i nieliniowego modelu tarcia Prony i Darcy [4], próbowano od razu zbudować nie-newtonowski model trójwymiarowy, lecz w końcu dzięki pracom takich weteranów i pionierów jak Navier i Green, racjonalista George Stokes w 1845 wyprowadził równanie konstytutywne opisujące lepki strumień pędu w płynie ściśliwym [2].

W drugiej połowie dziewiętnastego wieku nastąpiły dalsze prace nad równaniami konstytutywnymi. Dotyczyły one nie tylko części sprężystej, ale również modeli płynów reologicznych (słabo-nielokalnych w czasie), płynów starzejących się, płynów z termiczną transpiracją, płynów z własnościami magnetyczno-elektrycznymi, płynów z dyfuzją składników, płynów przewodzących ciepło, płynów nadprzewodzących ciepło, pęd i ładunek elektryczny. Do weteranów tego okresu zaliczają się Hill, Basset, Boussinesq, Maxwell, oraz polscy badacze tacy jak Kucharzewski, Żórawski, Gąsiewski, Skiba czy Natanson [42].

Drugim nurtem, nie mniej ważnym dla racjonalnej termomechaniki płynów, były badania nad właściwą postacią **strumienia energii**. Niestety z racji nie

występowania sprężystego strumienia energii, badania skupiły się na modelowaniu tzw. dyfuzyjnego strumienia energii składającego się ze strumienia ciepła, strumienia mechanicznego energii, dyfuzyjnego strumienia energii, strumienia radiacyjnego i innych. Tutaj kluczowymi modelami był liniowy model strumienia ciepła Fouriera (1824) i relacja Umova–Volterry opisująca mechaniczny strumień energii. Do weteranów i pionierów tamtego okresu zalicza się Pointinga, Jaumanna, Duhema, Plancka i Clebsha [23].

W trakcie badań nad strumieniem energii ukształtowała się lokalna w czasie i przestrzeni wersja II Zasady Termodynamiki, która operuje pojęciami entropii właściwej i strumienia entropii (Duhem 1904, Jaumann 1918, Eckart 1940). Do sprawy właściwego wykorzystania równania ewolucji entropii racjoniści powrócili za sprawą Truesdella na początku lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku.

Natomiast dyfuzja i transport masy stały się przedmiotem racjonalistów dopiero od pracy generała Ficka w 1870 roku. Podano w niej liniowe równanie konstytutywne na dyfuzyjny strumień masy w oparciu o pojęcie współczynnika dyfuzji masy. W literaturze krajowej rozszerzenie na nie-fickowski strumień masy były przedmiotem prac S. Sieniutycza [43].

Narzędzia badawcze racjonalnej termomechaniki Nie sposób w kilku zdaniach podać główne elementy badań racjonalistów. Spierali się oni, np. o sposób przejścia strumienia z objętości na brzeg obszaru orientowany wektorem normalnym \vec{n} . Po licznych zmaganiach, udokumentowanych wypełnionymi półkami bibliotecznymi, ustalono konsensus, który stwierdza, iż strumień pędu ($\overset{\leftrightarrow}{T}$), strumień ciepła (\vec{q}) oraz strumień masy (\vec{J}_m) na brzegu obszaru pojawiają się jako wektor siły (\vec{t}), ciepło (\dot{q}) i masa (\dot{m}) ponieważ ma miejsce:

$$\vec{t} = \overset{\leftrightarrow}{T} \vec{n}, \quad \dot{q} = \vec{q} \cdot \vec{n}, \quad \dot{m} = \vec{J}_m \cdot \vec{n}. \quad (1)$$

Trzeba przyznać, że racjoniści wiele czasu poświęcili na oczyszczenie języka matematycznego, którym posługiwała się termomechanika płynów. Ale uczciwie mówiąc to ich zasługi polegają głównie na tym, iż rozszerzali oni dobrze sprawdzone modele jednowymiarowe na mało użyteczne w czasach przedkomputerowych modele 3D. Taka praca nawet wtedy miała sens bowiem tak jak część aparatury doświadczalnej staje się z czasem przestarzała i współczesny eksperymentator może o niej zapomnieć, tak też znaczna część aparatu matematycznego z czasów naszych dziadków stanowi w istocie „nędzną rupieciarnię” [33].

Toteż stawiając hipotezy odnośnie postaci równań konstytutywnych, należy wciąż od nowa uczyć się myśleć prosto i używać pojęć matematycznych, które przedstawiają doświadczenie w sposób nie stępiony i nie zamglony. Przykładem takiego procesu „samooczyszczenia” są znane zmagania między liderami termomechaniki, które odbyły się w latach 1890–1910. Dotyczyły one ustalenia, który ze stosowanych zapisów tj. **quaternionowy** lub **tensorowy** ma obowiązywać w termomechanice racjonalnej [13]. Wynikiem tych sporów było wprowadzenie rachunku tensorowego, który wypchnął obowiązujący od ponad półwiecza rachunek quaternionowy z kontynentu na wyspy brytyjskie, a potem zepchnął go w otchłań

zapomnienia. Ostatnim protagonistą rachunku quaternionowego był Tait, a jego zaciekle walczył z Gibbssem, Kryłowem, Appellem, Menabrea była powodowana również faktem, iż z odejściem rachunku quaternionowego nastąpiło odcięcie się od wiedzy zawartej w pracach Hamiltona, Bassetta, Hilla, Taita i wielu innych [6], [7], [9].

Turbulencja jako kontrargument zasady obiektywności W połowie lat sześćdziesiątych racjonałiści głośno zaczęli mówić o zasadach (aksjomatach) modelowania - wszechpotężnych i wszechwiedzących. W praktyce zasady te mają status niepisanych ograniczeń procesu wymyślania hipotez, sprowadzających się w gruncie rzeczy do więzów nałożonych na możliwe formy równań konstytutywnych. Zasady racjonalnej termomechaniki w postaci „milczącej wiedzy”, w pewnym sensie istniały od czasów pierwszych racjonalistów i w końcu uzyskały status cenzora działającego według scenariusza samoograniczenia.

Faktycznym twórcą zasad jest C. Truesdell i w jego sformułowaniu zasady owe podajemy:

1. **Zasada determinizmu** - wyraża zastrzeżenie, iż strumienie masy, pędu i energii działające na hipotetyczną cząstkę ośrodka ciągłego, mogą zależeć od historii kinematycznej ośrodka określonej poprzez historię jego ruchu. Fakt ten należy uwzględnić podczas budowy równań konstytutywnych, zwłaszcza dla ośrodków posiadających nielokalności w czasie (całkowych względem czasu).
2. **Zasada lokalnego działania** - wyraża zastrzeżenia, iż strumienie masy, pędu i energii działające na hipotetyczną cząstkę ośrodka ciągłego, mogą zależeć tylko od stanu rozpatrywanej cząstki. Zasada ta eliminuje nielocalne (całkowe) w przestrzeni równania konstytutywne.
3. **Zasada materialnej obiektywności** - Historycznie pierwszym było sformułowanie Zaremby (1903), które mówi, że równania konstytutywne opisujące strumienie masy, pędu i energii winny uwzględniać I zasadę dynamiki Newtona, tzn. uwzględniać fakt, iż istnieje szereg ruchów umykających ludzkiemu poznaniu. Ruchy te poznajemy po tym iż wyniki transformacji pasywnych nie są odróżnialne od wyników transformacji aktywnych. Inaczej mówiąc, Zaremba proponuje swoje własne rozszerzenie I zasady dynamiki Newtona na przypadek continuum 3D. Niestety sformułowanie Zaremby, mimo swej prostoty, nie przyjęło się, a we współczesnej racjonalnej termomechanice dominują dwa sformułowania: C. Truesdella oraz I. Müllera.

Sformułowanie Truesdella zasadza się na poniekąd słusznym założeniu, iż dwaj różni obserwatorzy obserwując ten sam ruch kontinuum spostrzegają (mierzą) te same strumienie masy, pędu i energii. Dwaj obserwatorzy mogą względem siebie poruszać się i obracać swoje układy odniesienia w sposób znany w czasie. Właśnie zmiana w czasie wzajemnego obrotu dwóch obserwatorów, ujęta poprzez macierz obrotu $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$ jest niezwykle mocnym warunkiem sformułowania Truesdella. Obrót $\mathbf{Q}(t)$, stała translacja punktów

zaczepienia i translacja w czasie o stały interwał określają transformację pasywną jakiej podlegają obserwatorzy. Słowne wyprowadzenie zasady opiera się na wyjaśnieniu poprzez **eksperyment myślowy**. Truesdell proponuje rozważyć laboratoryjną sprężynę która raz rozciąga się o 5 cm pod wpływem sił, a drugi raz rozciąga się o 5 cm pod wpływem sił odśrodkowych wirowania sprężyny. W pierwszym przypadku nieruchomej sprężyny obserwujemy jej rozciąganie pod wpływem równomiernie przyłożonych sił wzrastających w stronę wolnego końca, w drugim przypadku obracający się wraz ze sprężyną obserwator zauważa rozciąganie sprężyny pod wpływem sił odśrodkowych narastających w miarę oddalania się od osi obrotu. Truesdell zadaje pytanie, które stało się podstawą zasady obiektywności materialnej, mianowicie czy moduł sprężystości Younga może zależeć od prędkości kątowej oraz czy prawo konstytutywne łączące odkształcenia i prędkości odkształceń z naprężeniami i prędkościami naprężeń może zależeć od prędkości obracania się sprężyny.

4. **Zasada współobecności** - wyraża zastrzeżenia, iż strumienie masy, pędu i energii działające na hipotetyczną cząstkę ośrodka ciągłego mogą zależeć od wszystkich zmiennych stanu.

Przytoczone tu **główne zasady** konstruowania równań konstytutywnych, będące niewzruszoną opoką i codziennym panaceum racjonalistów, w zetknięciu z problematyką turbulencji **tracą wiele ze swojej pryncypialności**. Dwie pierwsze zasady - zasada determinizmu i zasada lokalnego działania, całkowicie nie uwzględniają specyfiki turbulentnego transportu masy, pędu i energii.

- **Zasada determinizmu** - nakazuje formułować funkcjonały na postulowane turbulентne strumienie w postaci wyrażeń uwzględniających historię deformacji i wszystkie poprzednie stany rozpatrywanej cząstki kontinuum płynnego, pomijając historię cząstek które brały udział w przejściu laminarno-turbulentnym i wciąż mają wpływ na poziom turbulencji.
- **Zasada lokalnego działania** - ogranicza wymianę strumieni do wymiany z cząstkami z którymi rozpatrywana cząstka ma bezpośredni kontakt. Zasada ta jest więc w sprzeczności z koncepcją Taylora wielopunktowej turbulencji [21] w której określa się specyfikę wymiany turbulентnej jako wymiany nie zasadzającej się na bezpośrednim kontakcie dwóch sąsiadujących cząstek lecz na transporcie masy, pędu i energii na odległość rzędu lagrange'owskich długości toru poprzez wymianę miejsca.
- **Zasada materialnej obiektywności** - Mamy tu kilka zagadnień wartych dyskusji - pierwsze to pytanie czy wyrażenia na strumienie turbulентne winny być traktowane tak samo jak wyrażenia na strumienie molekularne konstytuujące rodzaj płynu (kwaśne mleko, zawilgocone powietrze, sucha para). Mamy tu różne podejścia, a szczególnie popularnym jest podejście traktujące obiekty takie jak turbulентna lepkość, turbulентne przewodzenie i turbulентna dyfuzja jako obiekty operacyjne określane w taki sam sposób zarówno w wodzie jak i w powietrzu. Zwolenników tego podejścia można

poznać po tym, iż nie używają oni pojęcia równania konstytutywnego w stosunku do turbulentnych strumieni, lecz mówią oni tylko o domknięciach kładzionych na te obiekty. Domknięcia nie są równaniami konstytuującymi materiał płynu, a są jedynie formułami eksperymentalnie ustalonymi dla danego typu zjawiska, służącymi do wyznaczenia ewolucji parametrów określających zjawisko turbulentnego transportu².

Następnym pytaniem, powstałym na wzór pytania o moduł sprężystości, jest pytanie czy lepkość turbulentna może zależeć od prędkości wirowania układu nieinercyjnego. Możemy tu wykonać eksperyment myślowy podobny do eksperymentu ze sprężyną. Jeśli rozpatrzmy przepływ wody przez wirujący walec z prędkością kątową $\vec{\Omega}$, który posiada wlot w jednym denku i wylot w drugim to w efekcie przepływu wywołanego działaniem sił odśrodkowych i sił grawitacji uzyskamy strumień masy, powiedzmy \dot{m}_Ω , wypływający i wpływający do zbiornika. Powtarzając ten sam eksperyment w nieruchomym zbiorniku z dodatkowo zaczezionymi siłami pozornymi modelującymi siły odśrodkowe otrzymamy przepływ przez walec równy $\dot{m}_{\Omega=0}$. Gdyby oba strumienie były równe to oznaczało by to, że lepkość turbulentna - odpowiedzialna za różnicę w strumieniach mas - jest taka sama i nie zależy od prędkości wirowania. Eksperymenty wykonywane na rzeczywistych stanowiskach [16,37] wykazują jednak, iż prędkość wirowania ma wpływ na lepkość turbulentną oraz tym samym na turbulentne strumienie. Taki fakt narusza paradygmat zasady obiektywności materialnej i potwierdza stanowisko badaczy turbulencji nadających strumieniom turbulentnym rangę domknięć.

Sprawa nie ma pojedynczego charakteru, bowiem w maszynach wirnikowych używany jest powszechnie model algebraiczny Boldwina-Lomaxa który uzależnia lepkość turbulencji płynu w wirującym wirniku od prędkości kątowej wirowania [41]:

$$\nu_t = l^2 [(\omega_{ij} + 2\Omega_{ij}) (\omega_{ij} + 2\Omega_{ij})], \quad (2)$$

gdzie l^2 - długość drogi mieszania, ω_{ij} skośnosymetryczna diada wirowości oparta o gradient prędkości względnej, $\Omega_{ij} = \epsilon_{ijk} \Omega_k$ skośno-symetryczna diada, zbudowana na wektorze prędkości kątowej wirnika. Trzeba pamiętać, że cząstka płynu wypływająca z nieruchomej kierownicy ma tor mocno odchyłony od osi wirnika i po wejściu w obszar wirnika wykonuje wraz z nim dziesiątki obrotów aby następnie opuścić wirnik w kierunku zbliżonym do kierunku osi wirnika. Turbulentny przepływ przez wirnik nie jest prosty do opisanego i zamodelowania, a szczególnie trudnym jest opisanie momentu wejścia cząstki do wirnika i momentu jego opuszczenia.

Racjonalna termodynamika turbulencji W podejściu racjonalnym „wzbudzony stan turbulentny” traktowany jest jak pewne złożone kontinuum z mikrostrukturą i stąd znane, gotowe, wypracowane termodynamiczne wzorce oceniające wkład do produkcji entropii, mogą być przeniesione na grunt ”termodynamiki turbulencji”. Nierówność Clausiusa-Duhema narzuca termodynamiczne ograniczenia nie tylko na równania konstytuujące ale również na równania ewolucji parametrów

²Jest zaskoczeniem, iż w podobny sposób traktuje turbulencję Truesdell uważając, że zasada obiektywności materialnej nie dotyczy domknięć [33]

mikrostruktury. Przykładowo, kinetyczna energia turbulencji k w podejściu termodynamiki racjonalnej może być interpretowana jako druga temperatura, stąd komplet termodynamicznie spójnych równań ewolucyjnych może być wyprowadzony [40,42].

Plan pracy W rozdziale wstępnym przedstawiliśmy narzędzia badawcze Termomechaniki Racjonalnej podkreślając, iż zasady określania równań konstytutywnych w przypadku modelowania turbulencji muszą być pominięte. Dzieje się tak, bowiem równania określające turbulentne strumienie masy, pędu i energii mają status domknięć określających nie materiał lecz proces.

Nim przejdziemy do właściwego tematu, którym jest **rewaloryzacja modelu Broszki**, przedstawimy w rozdziale 2 inne zrewaloryzowane modele turbulencji racjonalnej. Wybrano modele: Reynoldsa (model gradientowej turbulencji), Nowożyłowa (model jednolitej turbulencji przyściennie–objętościowej oparty na lokalnej liczbie Reynoldsa), Więckowskiego (wzbudzony stan turbulentny opisywany jest przez kontinuum Cosseratów), Sawickiego (model z konwekcyjnym turbulentnym strumieniem pędu).

Rozdział 3 stanowi właściwą rekonstrukcję modelu Broszki - model ten oparty jest na racjonalnym założeniu, iż turbulentny strumień pędu w obrębie cząstki kontinuum, nie podlega konwekcji (co analitycznie wyraża się poprzez formułę (49)). Rozdział 4 jest próbą przebudowania modelu Broszki do postaci zachowawczej spójnej ze współczesną CFD. W rozdziale 5 przedstawiono numeryczną implementację modelu Broszki do kodu Fluent oraz zaprezentowano testowe rozwiązanie. Pracę kończą wnioski podkreślające pozytywne aspekty modeli racjonalnych.

2 Modele matematyczne oparte o podejście racjonalne

Mimo widocznej (zwłaszcza na półkach bibliotecznych) liczby prac, racjonalna termomechanika płynów konsekwentnie omijała niektóre problemy w tym również modelowanie turbulencji. Ma rację Michał Broszko, który podkreślał w 1946 r., iż racjonalne podejście do modelowania przepływów burzliwych nie miało praktycznie żadnych sukcesów [22] oraz, że temat ten nawet dziś jest aktualny i wart uwagi. Nim przejdziemy do omówienia propozycji M. Broszko, przytoczmy z kart historii, kilka rozwiązań, które dla racjonalnego modelu turbulencji wciąż mają znaczenie podstawowe³.

Racjonalna teoria turbulencji Osborne’a Reynoldsa Nie zawsze zdajemy sobie sprawę, iż jeden z pierwszych modeli racjonalnej turbulencji podał Osborne Reynolds [12]. Traktował on turbulencję⁴ jako stan wzbudzony kontinuum, modelowany myślowo jako nieważki ekstra-płyn, który hipotetycznie może być

³Prace Thomsona [10] i Appella [14], chociaż demonstrują doskonały aparat matematyczny, nie mogą być zaliczane do mechaniki racjonalnej, bowiem podnosi się w nich kwestię analogii przepływu turbulentnego z innymi modelami klasycznej teorii pola

⁴Zauważalną jako ruch oscylacyjny, sinusoidalny [11]

rozszczepiony (ang. *by the additive splitting*) od stanu podstawowego nie wzbudzonego. Takie podejście jest duchem zbliżone raczej do podejścia Boussinesq [3,5], niż do podejścia kinetycznej teorii gazów Maxwella [8] opartej o nierównowagową PDF. W podejściu Boussinesq ekstra-płyn stanu wzbudzonego przenosi strumień pędu podobny jak dla modelu strumienia newtonowskiego:

$$\overleftrightarrow{R} = \overleftrightarrow{T}^t = 2\mu_t \overleftrightarrow{d}, \quad (3)$$

w którym turbulentny strumień pędu oznaczono przez \overleftrightarrow{T}^t (oznaczamy go również często literą R - *Reynolds*), zaś przez \overleftrightarrow{d} diadę prędkości deformacji. Ściśle mówiąc, powyższy wzór, z uwagi na warunek nieściśliwości $tr \overleftrightarrow{d} = 0$, określa jedynie dewiator strumienia \overleftrightarrow{R} i nie definiuje jego śladu równego podwojonej energii kinetycznej ruchu turbulentnego:

$$tr \overleftrightarrow{R} = R_{ii} = 2k. \quad (4)$$

Jeśli hipotetyczny płyn stanu wzbudzonego posiada własności płynu Newtona-Fouriera-Ficka to pozostałe turbulენტne strumienie mogą mieć postać:

$$\vec{q}^t = \lambda_t \nabla T, \quad (5)$$

$$\vec{J}^t = D_t \nabla c. \quad (6)$$

Tym samym 12 niewiadomych \overleftrightarrow{R} , \vec{q}^t , \vec{J}^t po domknięciu równaniami (5), (6) zostało sprowadzone do czterech niewiadomych $2k = R_{ii}$, ν_t , λ_t , D_t .

Model racjonalnej turbulencji w wersji ostatecznej podał Reynolds w 1903 [15]. Model ten, nazwany również gradientowym modelem turbulencji [40], idzie ponad klasyczne domknięcia. Może być on dziś sklasyfikowany jako model słabo lokalny w czasie i w przestrzeni, a we współczesnym zapisie ma postać [38] :

turbulentny strumień masy

$$\vec{J}^t = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \left[k^{\frac{1}{2}} \text{grad}(\rho) + \rho \text{grad} \left(k^{\frac{1}{2}} \right) \right], \quad (7)$$

turbulentny strumień pędu

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{R} = & \left(1 + \frac{\sigma}{\lambda} \right) \left\{ \frac{\rho}{2} k \overleftrightarrow{I} + \frac{1}{2} \frac{\lambda k}{\sqrt{\pi}} \left[\text{grad}(\rho \vec{J}^t - \rho \vec{v}) + \text{grad}^T(\rho \vec{J}^t - \rho \vec{v}) \right] \right\} + \\ & \rho \frac{1}{2} \left[(\vec{J}^t + \vec{v}) \otimes \text{grad}(k) + \text{grad}(k) \otimes (\vec{J}^t + \vec{v}) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

turbulentny strumień ciepła

$$\vec{q}^t = \rho \lambda^2 \left(1 + \frac{\sigma^2}{\lambda} \right) (\vec{J}^t - \vec{v}) + \frac{16}{15} \left(\lambda + \frac{\sigma^2}{3\lambda} \right) \left[k^{\frac{3}{2}} \text{grad}(\rho) + \rho \text{grad} \left(k^{\frac{3}{2}} \right) \right], \quad (9)$$

gdzie λ - długość drogi mieszania, σ - wielkość strefy kontaktu między cząstkami, $\pi = 3.14$. Jest to model nakrywający model (4)÷(6) w tym sensie, iż można z niego poprzez uproszczenie członów gradientowych uzyskać liniowe formuły. Warto podkreślić, iż energia kinetyczna turbulencji k występuje tu w pewnej „kaskadzie”, tzn. najniższa potęgą w równaniu strumienia masy, wyższa w równaniu strumienia pędu i najwyższa w równaniu strumienia energii. Racjonalny model Reynoldsa nie był implementowany numerycznie. Pewne odniesienia do tego modelu znajdują się w pracy ucznia Reynoldsa - E. Stanton [17]. Inną kontynuację tego podejścia zawiera praca Rotty [24].

Racjonalna teoria turbulencji V.V. Nowożyłowa W klasycznej teorii turbulencji Prandtla i Karmana [18,19] występują założenia, iż mechanizm turbulentnego transportu nie zależy od lepkości płynu, za wyjątkiem obszaru bliskiego ściance. Praktyka wykazuje [27,32], iż większość badaczy przyjmuje to jako stwierdzenie, iż lepkość turbulentna nie zależy od lepkości molekularnej. Skrupulatne i wyczerpujące analizy rozmaitych eksperymentów wykonane przez Nowożyłowa [34] wskazują, iż lepkość molekularna ma wpływ na lepkość turbulentną. Model Nowożyłowa wykorzystywał taką zależność w opisie procesu ewolucji zarówno lepkości turbulentnej jak i całego turbulentnego strumienia pędu.

Model Nowożyłowa można sklasyfikować jako rozszerzony model turbulencji przyściennej Prandtla tak, aby automatycznie opisywał turbulencję objętościową Reynoldsa.

Model Prandtla opierał się na analitycznym wyznaczaniu długości drogi mieszania l występującej w relacji (2). W jednowymiarowym przypadku ta długość zależy od:

- odległości od ścianki y (Prandtl)

$$l = 0.4y, \quad (10)$$

- stosunku pochodnych (Karman)

$$l = 0.4 \left| \frac{dv}{dy} \right| \cdot \left| \frac{d^2v}{dy^2} \right|^{-1}. \quad (11)$$

Nowożyłow uogólnił formułę Karmana na przypadek 3D tak, aby w sposób gładki przejść od modelowania turbulencji przyściennej do modelowania turbulencji objętościowej. Wprowadził on również zależność lepkości turbulentnej od lepkości molekularnej w postaci [34]:

$$\nu_t = \nu \kappa_n T^n, \quad n = \frac{3}{4}, \quad \kappa_n = 0.53, \quad (12)$$

gdzie T oznacza lokalną liczbę Reynoldsa wzorowaną na jednowymiarowej zależności (11):

$$T = \frac{\left[2 \left| 2 \overset{\leftrightarrow}{d} \cdot \overset{\leftrightarrow}{d} \right|^{\frac{1}{2}} - \left| 2 \overset{\leftrightarrow}{\omega} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\omega} \right| \right]}{\nu \left(2 \text{grad} \left| \overset{\leftrightarrow}{\omega} \right| \right)}, \quad (13)$$

gdzie $\text{grad}(\vec{v}) = \overset{\leftrightarrow}{d} + \overset{\leftrightarrow}{\omega}$, $\overset{\leftrightarrow}{d} = \overset{\leftrightarrow}{d}^T$, $\overset{\leftrightarrow}{\omega} = -\overset{\leftrightarrow}{\omega}^T$, $\nu = \mu/\rho$. W jednowymiarowym przypadku lokalna liczba Reynoldsa (13) przechodzi w:

$$T = \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|^3 \div \nu \left| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|. \quad (14)$$

Ewolucja turbulentnego strumienia pędu jest teraz określona jako:

$$\frac{\partial}{\partial t} \overset{\leftrightarrow}{R} + \text{grad}(\overset{\leftrightarrow}{R}) \vec{v} - 2 \left(\overset{\leftrightarrow}{R} \overset{\leftrightarrow}{\omega} + \overset{\leftrightarrow}{\omega}^T \overset{\leftrightarrow}{R} \right) = 2A\tau \overset{\leftrightarrow}{d} - 4\mu_t \left(\overset{\leftrightarrow}{d} \overset{\leftrightarrow}{\omega} + \overset{\leftrightarrow}{\omega}^T \overset{\leftrightarrow}{d} \right), \quad (15)$$

gdzie współczynnik A i τ zdefiniowane są następująco [34]:

$$A = \frac{7}{\sqrt{1 + 2 \left(\frac{\mu_t}{\mu} \right)^{\frac{1}{8}}}} + \frac{1}{2\tau} \rho \nu_0^2, \quad (16)$$

$$\tau = \frac{\left(\overset{\leftrightarrow}{R} \cdot \overset{\leftrightarrow}{d} \right)}{\sqrt{2 \overset{\leftrightarrow}{d} \cdot \overset{\leftrightarrow}{d}}}, \quad (17)$$

$$\nu_0 = \frac{|\text{grad}(\tau)|}{\left(\rho \Pi_d^{1/2} \right)}, \quad (18)$$

a Π_d oznacza drugi niezmiennik diady prędkości odkształcenia $\overset{\leftrightarrow}{d}$. Model ten jest wewnętrznie nieliniowy tzn. wyrażenie (17) zawiera niewiadomą $\overset{\leftrightarrow}{R}$.

Racjonalna teoria turbulencji J. Więckowskiego Model Więckowskiego [26] posługuje się hipotezą, iż stan wzbudzony może być opisany pewnym umownym płynem kinematycznie bogatszym niż płyn Cauchy'ego. Józef Więckowski proponuje aby płyn wzbudzony był płynem czysto wirowym, podobnym do płynu Rankine'a [3]. Podstawową niewiadomą tego płynu jest wektor wirowości, powiedzmy $\vec{\phi}$, który daje wkład do strumienia pędu poprzez składowe niesymetryczne. Oprócz bilansu pędu, drugim ważnym bilansem jest bilans momentu pędu.

Inaczej mówiąc, wkład hipotetycznego nieważkiego płynu wirowego nie jest wyrażany wyłącznie przy pomocy niesymetrycznego turbulentnego strumienia pędu $\overset{\leftrightarrow}{R} \neq \overset{\leftrightarrow}{R}^T$ dopuszczając niesymetryczne ekstra wkłady oparte na gradiencie wirowości, bowiem obok niesymetrycznego strumienia pędu pojawia się lepkie naprężenie momentowe $\overset{\leftrightarrow}{m}$. Z kolei ewolucja wektora wirowości turbulentnej $\vec{\phi}$ jest postulowana w formie bilansu momentu pędu. Bilans ciągłości masy musi być uzupełniony przez dodatkowy bilans ciągłości momentu bezwładności struktur wirowych. Stąd też model Więckowskiego nie wykorzystuje jawnie założenia o rozszczepieniu na płyn podstawowy i płyn wzbudzony.

Układ równań modelu Więckowskiego opisuje gęstość masy ρ , moment bezwładności mikrostruktury turbulentnej ρJ_{ij} , pęd ρv_i , wewnętrzny moment pędu $L_i = \rho J_{ij} \phi_j$, całkowitą energię wewnętrzną ρe składającą się z energii wewnętrznej właściwej, energii kinetycznej i energii ruchu wirowego:

bilans masy:

$$\partial_t (\rho) + (\rho v_i)_{,i} = 0, \quad (19)$$

bilans momentu bezwładności:

$$\partial_t (\rho J_{ij}) + (\rho J_{ij} v_k)_{,k} = J_1 v_i v_j + J_2 \phi_i \phi_j, \quad (20)$$

bilans pędu:

$$\partial_t (\rho v_i) + (\rho v_i v_j + p I_{ij})_{,j} = t_{ij,j} + \rho b_i, \quad (21)$$

bilans momentu pędu:

$$\partial_t (\rho J_{ij} \phi_j) + (\rho J_{ij} \phi_j v_k + m I_{ik})_{,k} = m_{ik,k} + \epsilon_{ijk} t_{kj}, \quad (22)$$

bilans energii:

$$\partial_t (\rho e) + [(\rho e + p + m) v_i]_{,i} = (t_{ij} v_j + m_{ij} \phi_j + q_i)_{,i} + \rho b_i v_i, \quad (23)$$

gdzie:

ρ [kg/m³] – gęstość masy,

$\vec{v} = v_i \vec{e}_i$ – wektor prędkości,

$\overset{\leftrightarrow}{J} = J_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \overset{\leftrightarrow}{J}^T$ – moment bezwładności mikrostruktury,

$p \overset{\leftrightarrow}{I} = p \delta_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ – kulisty tensor ciśnienia zewnętrznego,

$\overset{\leftrightarrow}{t} = t_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \neq \overset{\leftrightarrow}{t}^T$ – nieodwracalny strumień pędu (naprężenie lepkie),

$\vec{b} = b_i \vec{e}_i = -9.81 \vec{e}_z$ – siła ciężenia,

$m \overset{\leftrightarrow}{I} = m \delta_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ – kulisty tensor mikro-ciśnienia,

$\overset{\leftrightarrow}{m} = m_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ – strumień momentu pędu (lepki),

$\vec{\phi} = \phi_i \vec{e}_i \neq 1/2 \epsilon_{ikl} v_{k,l} \vec{e}_i$ – wektor wirowości turbulენტnej,

$\overset{\leftrightarrow}{\omega} = 1/2 \epsilon_{ijk} v_{j,k} \vec{e}_i$ – wirowość pola prędkości,

$\epsilon = \epsilon_{kij} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = -\overset{\leftrightarrow}{I} \times \overset{\leftrightarrow}{I}$ – skośnie symetryczny alternator Ricci,

$e = u + 1/2 v_i v_i + 1/2 \phi_j J_{ji} \phi_i$ – energia całkowita,

$\vec{q} = q_i \vec{e}_i$ – całkowity strumień ciepła.

Poszczególne elementy modelu Więckowskiego wymagają dalszych wyjaśnień. Zakłada się, iż energia wzbudzonego płynu turbulentnego będzie partycypowała w bilansie energii, stąd też równanie stanu powiększone jest o wyznacznik z momentu bezwładności $J = \det \overset{\leftrightarrow}{J}$ tak, że:

$$u = u(s, \rho, J). \quad (24)$$

W związku z tym, płyn może przenosić sferyczne naprężenia sprężyste, sferyczne momenty sprężyste i sferyczne naprężenia cieplne ($v = 1/\rho$):

$$p = -\frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{s,J}, \quad m = -\frac{\partial u}{\partial J} \Big|_{s,\rho}, \quad T = -\frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{\rho,J}. \quad (25)$$

Oznacza to, iż część energii płynu turbulentnego magazynowana jest sprężysto w postaci energii wewnętrznej, wywołując sprężyste naprężenia typu kulistego. Model Więckowskiego pomija możliwość powstawania sprężystych momentów postaciowych, a te które są wywoływane, tzn. m_{ij} są typu lepkościowego. Składowe niesymetrycznego tensora t_{ij} naprężeń lepkich zawierają część symetryczną będącą sumą naprężeń molekularnych i turbulentnych oraz część niesymetryczną będącą funkcją tylko stanu turbulentnego:

$$t_{ij} = t_{(ij)} + t_{[ij]} = \tau_{ij} + R_{ij} + t_{[ij]}. \quad (26)$$

Współczynniki lepkości pojawiające się w definicji $t_{[ij]}$ mają charakter turbulentnych współczynników lepkości, natomiast część symetryczna posiada efektywne współczynniki lepkości.

Gradient prędkości dzieli się na część symetryczną (tzw. diadę deformacji) i skośno symetryczną część – wirowość :

$$v_{i,j} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) + \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) = d_{ij} + \omega_{ij}. \quad (27)$$

Wektor makroskopowej wirowości, zbudowany na polu gradientu prędkości nie jest równy wektorowi wirowości $\omega_i \neq \phi_i$ stąd $\vec{\phi}$ jest traktowany jako wewnętrzny stopień swobody, a równanie pędu jako odpowiadające mu równanie ewolucyjne. Energia kinetyczna tego wewnętrznego stopnia swobody jest interpretowana jako energia kinetyczna ruchu turbulentnego:

$$K = \frac{1}{2} \phi_i J_{ij} \phi_j, \quad (28)$$

stąd można powiedzieć, iż bilans energii zawiera w sobie ekstra wkład od energii kinetycznej turbulencji oraz ekstra wkład do strumienia mechanicznego energii. Niestety, pewnym mankamentem modelu jest brak możliwości dokładnego modelowania turbulentnego strumienia ciepła. Może on być obliczany jedynie z formuły fenomenologicznej:

$$q_i^t = \lambda^t(K) \nabla T + \lambda^\phi \phi_i, \quad (29)$$

w której $\lambda^t(K)$ – turbulentny współczynnik przewodzenia zależny od energii kinetycznej turbulencji K oraz λ^ϕ współczynnik przewodnictwa wirowego.

Racjonalny model turbulencji winien być uzupełniony równaniami domknięcia na poszczególne strumienie pędu i momentu pędu. Najprostszymi modelami domknięć są;

$$t_{(ij)} = \left[- \left(\frac{2}{3} \mu d_{kk} \right) \delta_{ij} + 2\mu d_{ij} \right] + \mu_2 \phi_i \phi_j, \quad (30)$$

$$t_{[ij]} = \mu_3 \epsilon_{ijk} (\omega_k - \phi_k), \quad (31)$$

$$m_{ij} = \mu_4 \phi_{k,k} \delta_{ij} + \mu_5 \phi_{i,j} + \mu_6 \phi_{j,i}. \quad (32)$$

Powyższy model posiada szereg stałych wymagających kalibracji. Są to: I_1 , I_2 , stałe sprężyste w równaniu (20), stałe λ^t i λ^ϕ oraz μ , μ_2 , μ_3 , μ_4 , μ_5 , μ_6 w (29), (31). Do rozwiązania zagadnienia potrzebne są dodatkowo warunki brzegowe, którymi są:

$$\vec{\phi} \Big|_{A_{wall}} = 0, \quad (33)$$

$$K \Big|_{wlot} = K^*, \quad (34)$$

$$\overleftrightarrow{J} \Big|_{wlot} = \overleftrightarrow{J}^*. \quad (35)$$

W latach pięćdziesiątych, przypadających na niespotykaną aktywność zawodową profesora Więckowskiego, pięć nowych współczynników lepkości do wykalibrowania, nawet dla racjonalistów, było przeszkodą nie do pokonania. Toteż praca [26] ukazała się z komentarzem redakcji, która pisze, że nie bierze odpowiedzialności za tego typu pomysły. Aktualnie, problem wykalibrowania stałych nie budzi już takich emocji - przykładowo standardowy model $k-\epsilon$ ma ich dziesięć - stąd model Więckowskiego może być traktowany jako model referencjalny we wszystkich próbach rozszerzenia modelu Reynoldsa.

Model konwekcyjnej turbulencji J. Sawickiego Opór tarcia wewnętrznego jaki stawia płyn w trakcie przepływu w prostym kanale zamkniętym o przekroju kołowym albo prostokątnym, był przedmiotem wielu prac hydromechaników siedemnastego i osiemnastego wieku [4]. Badania były inspirowane koniecznością ustanowienia formuł projektowych dla rurociągów wodociągowych, zwłaszcza wzoru na spadek ciśnienia związany z oporami tarcia. Aby formuła miała zakres ważności obejmujący przepływy w dużych prędkościach jakie badano eksperymentalnie, Prony i Darcy zaproponowali, aby formuła na straty tarcia zawierała człon liniowy i kwadratowy względem prędkości. Późniejsze badania pokazały, iż współczynnik przy członie liniowym w pewnych przypadkach jest mały a w innych nie.

Do tej koncepcji, zwłaszcza w wersji Bussuta i Dubuata, odnosi się Stokes w paragrafie szóstym swojej pracy [2], kiedy dyskutuje różnice między oporem tarcia w przepływie laminarnym i burzliwym. Mówi on, w sposób jawny o tym, iż opór tarcia występujący w przepływie laminarnym winien być liniową funkcją

prędkości oraz iż opór tarcia wewnętrznego przepływu turbulentnego winien być kwadratową funkcją prędkości⁵.

Przechodząc z przypadku jednowymiarowego do sformułowania trójwymiarowego, aby przedłużyć rozumowanie Stokesa, należało by założyć, iż tensor naprężeń burzliwych jest kwadratową (diadyczną) funkcją wektora prędkości. Takie rozszerzenia legło u podstaw modelu konwekcyjnej turbulencji Jerzego Sawickiego [36]. Formalnie taka operacja jest możliwa, bowiem nie narusza struktury logicznej mówiącej, iż za dodatkowy turbulentny transport pędu jest odpowiedzialny **pevien strumień**, który w ogólności może mieć **trojąką naturę**. Może to być bowiem:

Turbulentny strumień konwekcyjny $\overset{\leftrightarrow}{R}^c$ (*c* - convective),

Turbulentny strumień sprężysty $\overset{\leftrightarrow}{R}^e$ (*e* - elastic, recoverable),

Turbulentny strumień dyfuzyjny $\overset{\leftrightarrow}{R}^v$ (*v* - viscous).

Tak więc bilans pędu uzupełniony o dodatkowy transport pędu wyrażony za pomocą trzech powyższych strumieni ma teraz postać :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \text{div} \left(\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + \overset{\leftrightarrow}{R}^c + p \overset{\leftrightarrow}{I} + \overset{\leftrightarrow}{R}^e \right) = \text{div} \left(\overset{\leftrightarrow}{\tau} + \overset{\leftrightarrow}{R}^v \right) + \rho \vec{b}. \quad (36)$$

Można teraz hipotezę Stokesa o tym, iż turbulentne tarcie wewnętrzne jest proporcjonalne tylko do kwadratu prędkości ($\overset{\leftrightarrow}{R}^e = 0$) zapisać dwojako - albo jako wyrażenie na konwekcyjny strumień pędu albo wyrażenie na dyfuzyjny strumień pędu:

$$R_{ij}^c \sim v_i v_j, \quad (37)$$

$$R_{ij}^v \sim d_{ik} d_{kj} \sim v_{i,k} v_{k,j}. \quad (38)$$

Obie te definicje formalnie wyrażają opór wewnętrzny przez kwadrat prędkości, czyli są analitycznymi wyrażeniami hipotezy. Jerzy Sawicki [36] bada dalej

⁵Kwestia oporów przepływu burzliwego specjalnie interesowała Stokesa, bowiem podczas wykonywania „szczotek” artykułu dodał wstawkę o możliwych mechanizmach ruchu burzliwego generowanych przez poruszające się wahadło lub ściankę chropowatą. Wyjaśnia on naturę laminarnego tarcia liniowo-proporcjonalnego do (gradientu) prędkości oraz tarcia burzliwego – kwadratowego względem prędkości – wywołanego wirem mającym pewne podobieństwo do wahadła przechodzącego przez ciecz – opór stawiany przez wahadła jest proporcjonalny do powierzchni przekroju i kwadratu prędkości.

Podkreślmy fakt, iż **Stokes był w pełni świadomy**, iż proponowana przez niego liniowa zależność między tensorem naprężeń lepkich, a symetryczną częścią gradientu prędkości **modeluje tylko przepływ laminarny**. Przypominamy ten fakt, aby dać kontrargument badaczom, którzy pod hasłem DNS (niestety skutecznie) sugerują, iż równania bilansu pędu z liniowym domknięciem Naviera–Stokesa na lepki strumień pędu, opisują zarówno stan laminarny jak i turbulentny. Inaczej mówiąc, pragniemy podkreślić, że z punktu widzenia fizycznych założeń postawionych przez Stokesa, **badania DNS pozbawione są podstaw** i nie powinny być traktowane poważnie. Jak zwykle w nauce, niepoważne hipotezy przyciągają niepoważnych badaczy stąd nie należy wierzyć w ani jedno rozwiązanie DNS, które są jedynie niebezpieczną zabawą numeryków odcinających się od fizycznych podstaw. Z drugiej zaś strony, dopóki DNS nie będzie miało swojego eksperymentalnego odpowiednika, dopóty pozostanie branżą nieweryfikowalną

konwekcyjny strumień turbulentnego transportu pędu \overleftrightarrow{R}^c , słusznie zakładając, iż może on być izotropowy (izotropowa turbulencja pędu) oraz anizotropowy (anizotropowa turbulencja pędu):

$$R_{ij}^e = \begin{cases} \rho A v_i v_j \\ \rho A_{ijkl} v_k v_l \end{cases}, \quad (39)$$

gdzie $A(T)$ - stała izotropowej turbulencji zależna od temperatury, $A_{ijkl}(T)$ - współczynniki anizotropii, których niezależna ilość z uwagi na symetrię poboczną i główną redukuje się do dziesięciu.

J. Sawicki rozpatruje prosty przykład jednowymiarowy [36] który daje się scałkować analitycznie. Jest to burzliwy, ustalony przepływ wody między dwoma równoległymi płytkami odległymi o $H = 1.0$ m. Górna płytka porusza się ze stałą prędkością $U = 0.14$ m/s, zaś płytka dolna jest nieruchoma. Przyjęto model **anizotropowej turbulencji** w postaci:

$$R_{xz}^c = \rho A_{xz} v_x^2(z), \quad (40)$$

skutkiem czego otrzymamy z bilansu pędu (36) następujące równanie:

$$2\rho A_{xz} v_x \frac{dv_x}{dz} + \mu \frac{d^2 v_x}{dz^2} = 0, \quad (41)$$

z warunkami brzegowymi

$$z = 0 \rightarrow v_x = 0, \quad z = H \rightarrow v_x = U. \quad (42)$$

Dwukrotne całkowanie równania (41), z warunkami brzegowymi (42) na brzegu $z = 0$ daje rozwiązanie, które zawiera stałą C_H :

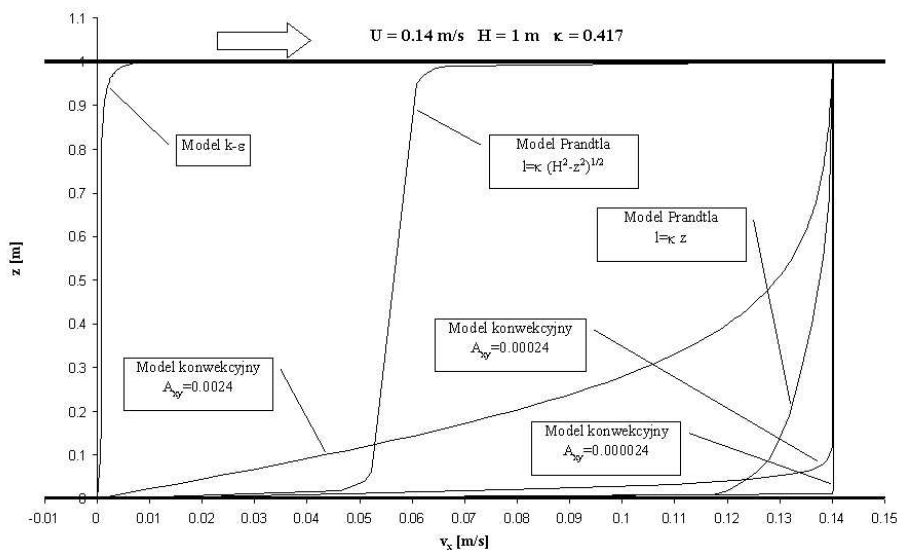
$$v_x(z) = K C_H \frac{1 - \exp\left(-\frac{2C_H z}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2C_H z}{K}\right)}, \quad (43)$$

którą określimy z warunku $z = H$. Współczynnik K zdefiniowano jako $K = \sqrt{\frac{\mu}{\rho A_{xz}}}$. Rysunek 1 poniżej pokazuje rozwiązanie (43) dla trzech stałych: $A_{xz} = 0.0024, 0.00024, 0.000024$ w porównaniu z modelami: Prandtla opartym o lepkość turbulentną $\mu_t = \rho l^2 |\partial v_x / \partial v_z|$ oraz o dwa różne wyrażenia na drogę mieszania tj. a) $l = \kappa \sqrt{H^2 - z^2}$ - burzliwość tłumiona wzdłuż obu ścianek, b) $l = \kappa z$ - burzliwość tłumiona tylko wzdłuż nieruchomej ścianki oraz standardowym $k-\epsilon$.

Najbardziej realistycznym jest rozwiązanie wg modelu $k-\epsilon$. Model Prandtla z długością drogi mieszania typu a) jest błędny. Natomiast, rozwiązanie z konwekcyjną turbulencją wystarczająco dobrze opisuje przepływ w objętości w kanale o wysokości $H = 2$ m i prędkości w osi kanału równej $v_x = 0.14$ m/s.

3 Rewaloryzacja modelu Michała Broszki

Celem praktycznym, jaki uniwersalny model turbulencji winien spełniać, jest połączenie modeli opisujących turbulencję objętościową z modelami opisującymi



Rysunek 1: Profile prędkości generowane przez poruszającą się płytkę $v_x = 0.14$ m/s

turbulencję przyścienną. Pewną słabością podejścia Boussinesqa jest to, iż opisując turbulencję objętościową takich zjawisk jak spływ śladów lub wtrysk strugi w miejscach dalekich od ścianek, jednocześnie zawodzi w miarę zbliżania się do ścianki. Inaczej mówiąc, model Boussinesqa modeluje dobrze to co nazywamy turbulencją objętościową. Z kolei, począwszy od Prandtla i Karmana, rozwinął się opis turbulencji przyściennej, głównie opierając się na pojęciu drogi mieszania [16], [27], [32]. Pojęcie to, wzorowane na analogicznym pojęciu drogi swobodnej w kinetycznej teorii gazów, wprowadzało mikrostrukturę przepływu turbulentnego w postaci zderzeń i rozprożeń wirów w formie kaskad energetycznych.

Według M. Broszki⁶ złożeniem modelu turbulencji objętościowej i modelu

⁶Pierwszy zapis dotyczący M. Broszki znajdujemy w modnografii A.T. Troskalańskiego pt. *Hydromechanika*. Profesor Troskalański, kierując się swym doświadczeniem, a po trosze i intuicją co do przyszłości modelowania przepływów burzliwych tak oto, na stronie 218, wprowadza czytelnika w zagadnienie:

„Obserwując przepływy cieczy rzeczywistych przez przewody, spostrzeżono, iż istnieją dwa rodzaje przepływów: uwarstwione i burzliwe... Warunki powstawania burzliwości określił doświadczalnie Osborne Reynolds (1883 r.). Postępując się rachunkiem wielkości okresowo-zmiennych uczony ten wyprowadził równania różniczkowe ruchu burzliwego. Niestety, błędna interpretacja fizykalna doświadczeń Reynoldsa oraz trudności natury matematycznej sprawiły, iż zagadnienie ruchu burzliwego – mimo usiłowań wybitnych teoretyków jak Lord Rayleigh (1878 r.), J.V. Boussinesqa (1897 r.), H.A. Lorentza (1897 r.), L. Prandtla (1904 r.) i wielu innych – stanowiło do niedawna nie rozwiązana zagadkę. Nową próbę rozwiązania zagadki ruchu burzliwego podjął uczony polski M. Broszko ogłaszając w 1921 r. „nową teorię ruchu cieczy rzeczywistych”, opartą na oryginalnych koncepcjach fizykalnych. W wyniku 25-letnich zmagani z trudnościami ujęcia zjawisk ruchu cieczy rzeczywistych w więzy analizy matematycznej, doprowadził M. Broszko do całkowitego rozwiązania zagadnienia ruchu burzliwego, uzyskując doskonałą zgodność wyników teoretycznych z doświadczeniem. Teorię M. Broszki rozwinął W. Squire w rozprawie pt. „A unified theory of turbulent flow” (1958 r.)”.

Eksperyment Reynoldsa został przedstawiony w pracy [11], w której również określono glo-

turbulencji przyściennej winna zajmować się "teoria racjonalna". Pewne próby w tym kierunku spotykamy w modelu Nowożyłowa, w którym wprowadza się pojęcie *lokalnej liczby Reynoldsa*, działającej równie dobrze w pobliżu ścianki jak i wewnątrz kanału.

Broszko podejmuje problem warunków zszycia rozwiązań jakie spotykamy na powierzchni oddzielającej przepływ laminarny od burzliwego. Warunkom zgodności (lub niezgodności) winien, przede wszystkim, podlegać uśredniony wektor prędkości, jego gradient oraz naprężenie średnie Reynoldsa. Broszko proponuje wprowadzenie funkcji nieciągłości lub skoku w postaci wektora \vec{C} , który wprowadzie nie występuje jawnie w równaniach bilansu, ale pojawia się w nieciągłościach warunków brzegowych.

Wektor \vec{C} ma znaczenie, gdy problem chropowatości brzegu musi być uwzględniony. Z badań eksperymentalnych nad rozkładem strat energii kinetycznej w kanałach wynika jasno jak duży jest wpływ chropowatości w obszarze turbulentnym. Kalibracja wektora \vec{C} jest problemem otwartym, który może wyjaśnić się przy dokładniejszej analizie sposobu w jaki jest ten wektor identyfikowany w zadaniu jednowymiarowym [25], [28].

Punktem wyjściowym rozumowania jest hipoteza o addytywnym "rozszczerpieniu" pola prędkości na część średnią i fluktuacje ruchu "pobocznego"⁷:

$$\vec{v} = \vec{v}'' + \vec{v}'. \quad (44)$$

Tej hipotezie towarzyszą trzy dodatkowe hipotezy, mające charakter formuł matematycznych obowiązujących w procesie ustalania równań opisujących. Są to:

$$\frac{1}{V} \iiint_V (\vec{v} + \vec{C}) \otimes \vec{v}' dV = \frac{1}{V} \iiint_V \vec{v}' \otimes \vec{v}' dV, \quad (45)$$

$$\frac{1}{V} \iiint_V \text{grad}(\vec{v}) dV = \text{grad} \left(\frac{1}{V} \iiint_V \vec{v} dV \right) = (\text{grad} \vec{v})'', \quad (46)$$

$$\frac{1}{V} \iiint_V \frac{d}{dt} [(\vec{v} + \vec{C}) \otimes \vec{v}] dV = \frac{1}{V} \iiint_V \frac{d}{dt} [\vec{v}' \otimes \vec{v}'] dV. \quad (47)$$

Obszar rozszczerpienia V nie jest określony z góry, stąd całkowanie, w zależności od problemu może przebiegać w objętości $1 m^3$ jak również w objętości $1 mm^3$. Wychodząc z (47), po złożonych, trudnych do zwartego przedstawienia, przekształceniach Broszko znajduje podstawowe dla modelu dziewięć równań [22]:

$$\text{div} \left[(\vec{v}'' + \vec{C}) \otimes (\vec{v}' \otimes \vec{v}') \right] = 0, \quad (48)$$

lub w terminach turbulentnego strumienia pędu $\rho = \text{const}$, $\overleftrightarrow{R} = (\rho \vec{v}' \otimes \vec{v}')''$

$$\text{div} \left[(\vec{v}'' + \vec{C}) \otimes \overleftrightarrow{R} \right] = 0. \quad (49)$$

balną liczbę Reynoldsa (oznaczoną literą K) dla przepływu ustalonego w rurze. Nie udało się dotrzeć autorom do domniemanej pracy Broszko z 1921 r. – również w [22], [25] brak jest autorskich odnośników. W kraju teorię M. Broszki rozwinął Eustachy Burka [28].

⁷Znak plus (+) użyty w (44) winien być raczej rozumiany w sensie topologicznym. Niestety, właściwa „matematyka” do (44) **jeszcze nie istnieje**

Dziewięć równań (48) lub (49) zezwala na wyeliminowanie turbulentnego strumienia pędu \overleftrightarrow{R} bez żadnych dodatkowych domknięć lub innych zmyślonych hipotez.

W przypadku ruchu cieczy między dwoma wirującymi współosiowymi wałcami równania (49) upraszczają się do jednego opisującego składową $R_{r\phi}$:

$$\frac{d}{dr} (v_\phi R_{r\phi}) + \frac{v_\phi}{r} R_{r\phi} = 0. \quad (50)$$

Równanie to daje się scałkować przedziale między promieniami wałców, tak że:

$$R_{r\phi} = \frac{A}{rv_\phi}, \quad (51)$$

gdzie A stała całkowania, r - promień, v_ϕ - obwodowa składowa prędkości. Składowa promieniowa równania pędu w przepływie ustalonym, po wprowadzeniu wzoru (51) na strumień Reynoldsa ma postać:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(rv_\phi)}{dr} \right] = \frac{A}{v} \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{rv_\phi} \right) + \frac{2}{r^2 v_\phi} \right]. \quad (52)$$

Poprzez dwukrotne całkowanie uzyskujemy rozwiązanie na niewiadomą v_ϕ wraz z dwoma stałymi: C_ϕ (o wymiarze prędkości) i stałej B związanej ze A ($B = \frac{A}{vC_\phi}$):

$$C_\phi \ln \left(\frac{v_\phi}{r} + C_\phi \right) - \left(\frac{v_\phi}{r} + C_\phi \right) - \frac{B}{2} \frac{1}{r^2} = 0. \quad (53)$$

Jest to rozwiązanie osiągnięte bez żadnej dodatkowej stałej ani innego typu hipotezy. Stałe występujące w (53) wymagają kalibracji w oparciu o eksperyment. Różnią się one znacznie w punktach nieciągłości przepływu⁸.

4 Model numeryczny

Numeryczna wersja modelu Broszki, spójna z dzisiejszą CFD, musi być sformułowana inaczej. Poniżej przedstawimy model racjonalnej turbulencji oparty o późniejszą modyfikację modelu Broszko opracowaną już podczas jego pobytu w Gdańsku [25]. W modelu tym rezygnuje się z jawnego udziału stałej wektorowej \vec{C} , chociaż w przykładzie dotyczącym tzw. przepływu Taylora między dwoma wirującymi cylindrami taka stała występuje. Podstawą modelowania racjonalnej turbulencji są „warunki racjonalności”, dzięki którym można ściśle określić turbulentny strumień pędu.

Wyjściową zależnością jest sensowne (racjonalne) założenie iż strumień masy $\rho \vec{v}'$ fazy wzbudzonej (fluktuującej) w obszarze cząstki materialnej zajmującej objętość $V(t)$, posiadającej wciąż te same materialne cząstki, jeśli jest unoszony konwekcyjnie ze średnią prędkością \vec{v}'' jest równy zero. Racjonalność takiego

⁸Podobne równanie do (49) dla szczególnego przepływu w rurze prostej wyprowadził E. Burka [28]. Prace nad racjonalnym modelem turbulencji spotkały się z wnikliwą analizą Bondera i Drobeta [29]. Inną interpretację stałej \vec{C} podał W. Squire [30]

warunku zachowana jest również wtedy, gdy prędkość średnia jest równa zero. Warunek ten zapisujemy jako:

$$\frac{1}{V} \iiint_{V(t)} \vec{v}'' \otimes (\rho \vec{v}') dV \equiv [\vec{v}'' \otimes (\rho \vec{v})]'' = 0. \quad (54)$$

Co więcej, warunki racjonalności nakazują, aby dla objętości materialnej, posiadającej mimo mikroskopowych fluktuacji ciągle te same materialne cząstki, założyć iż jakakolwiek substancjalna zmiana w czasie konwekcyjnego strumienia fluktuującego pędu również będzie równa zero :

$$\frac{1}{V} \iiint_{V(t)} \frac{d}{dt} [\vec{v}'' \otimes (\rho \vec{v}')] dV = 0. \quad (55)$$

Powyższe równanie prowadzi do **dziwięciu równań** ograniczających ewolucję turbulentnego strumienia pędu bowiem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \iiint_{V(t)} \frac{d}{dt} [\vec{v}'' \otimes (\rho \vec{v}')] dV &= \frac{1}{V} \iiint_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{v}'' \otimes (\rho \vec{v}')] + \\ &+ \operatorname{div} [\rho \vec{v}'' \otimes \vec{v}' \otimes \vec{v}] dV = 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Zakładając w powyższym równaniu $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$ oraz korzystając z relacji komutowania pochodnej przestrzennej z całką mamy:

$$\operatorname{div} [\vec{v}'' \otimes \overleftrightarrow{R}] = 0, \quad (57)$$

gdzie turbulentny strumień pędu oznaczono jako $\overleftrightarrow{R} = (\rho \vec{v}' \otimes \vec{v}')''$. Jest to dziewięć równań w oparciu o które można wyznaczyć racjonalną zależność na sześć składowych tensora Reynoldsa. Zależność (57) należy również fizycznie (nie tylko racjonalnie) interpretować jako następującą całkę powierzchniową:

$$\iiint_V \operatorname{div} [\vec{v}'' \otimes \overleftrightarrow{R}] dV = \oint_{\partial V} (\vec{v}'' \otimes \overleftrightarrow{R}) \cdot \vec{n} dA = 0. \quad (58)$$

Całka powierzchniowa mówi nam, iż konwekcyjnie unoszony strumień pędu turbulentnego nie może być dowolny i że jest zbilansowany już w obrębie najmniejszej cząstki kontinuum.

Dalszy tok postępowania jest następujący. Wprowadźmy za Broszko wektor \vec{B} oznaczający dywergencję ze strumienia \overleftrightarrow{R} :

$$\vec{B} = \operatorname{div} \overleftrightarrow{R} = R_{ij,j} \vec{e}_i = B_i \vec{e}_i, \quad (59)$$

oraz zapiszmy (57) w następującej postaci

$$\operatorname{div} [\vec{v}'' \otimes \overleftrightarrow{R}] = \operatorname{grad} (\vec{v}'') \overleftrightarrow{R} + \vec{v}'' \otimes \vec{B} = 0. \quad (60)$$

Odwracając związek (60) i traktując wektor \vec{B} jako niewiadomą mamy:

$$\vec{B} = -\operatorname{grad} (\vec{v}'') \overleftrightarrow{R} (\Delta^{-1} \vec{v}) = -\overleftrightarrow{R} \overleftrightarrow{\Delta} \quad (61)$$

gdzie wektor $\vec{\Delta} = \Delta_x \vec{e}_x + \Delta_y \vec{e}_y + \Delta_z \vec{e}_z$ posiada prostą budowę:

$$\Delta_i = \frac{D}{D_i}, \quad i = x, y, z \quad (62)$$

zaś D , D_x , D_y , D_z oznaczają następujące podwyznaczniki będące funkcją gradientu średniej prędkości i średniej prędkości:

$$D = \begin{vmatrix} v''_{x,x} & v''_{x,y} & v''_{x,z} \\ v''_{y,x} & v''_{y,y} & v''_{y,z} \\ v''_{z,x} & v''_{z,y} & v''_{z,z} \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} v''_x & v''_{x,y} & v''_{x,z} \\ v''_y & v''_{y,y} & v''_{y,z} \\ v''_z & v''_{z,y} & v''_{z,z} \end{vmatrix}. \quad (63)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} v''_{x,x} & v''_x & v''_{x,z} \\ v''_{y,x} & v''_y & v''_{y,z} \\ v''_{z,x} & v''_z & v''_{z,z} \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} v''_{x,x} & v''_{x,y} & v''_x \\ v''_{y,x} & v''_{y,y} & v''_y \\ v''_{z,x} & v''_{z,y} & v''_z \end{vmatrix}, \quad (64)$$

Relacje powyższe jednoznacznie określają dywergencję strumienia \vec{R} , nie określając jednak samego \vec{R} . Relację na \vec{R} określimy następująco. Niech główną siłą napędzającą ewolucję turbulentnego strumienia pędu będzie pierwszy niezmiennik tego tensora, a struktura jego składowych niech będzie proporcjonalna do symetryzowanego gradientu średniej prędkości, wtedy:

$$R_{xy} = R_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{D_y}{D_x} R_{xx} + \frac{D_x}{D_y} R_{yy} \right), \quad (65)$$

$$R_{xz} = R_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{D_z}{D_x} R_{xx} + \frac{D_x}{D_z} R_{zz} \right), \quad (66)$$

$$R_{zy} = R_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{D_y}{D_z} R_{zz} + \frac{D_z}{D_y} R_{yy} \right). \quad (67)$$

Również między składowymi głównymi zachodzą relacje:

$$R_{yy} = \left(\frac{D_y}{D_x} \right)^2 R_{xx}, \quad R_{zz} = \left(\frac{D_z}{D_x} \right)^2 R_{xx}, \quad (68)$$

$$R_{xx} = \left(\frac{D_x}{D_y} \right)^2 R_{yy}, \quad R_{zz} = \left(\frac{D_z}{D_y} \right)^2 R_{yy}, \quad (69)$$

$$R_{xx} = \left(\frac{D_x}{D_z} \right)^2 R_{zz}, \quad R_{yy} = \left(\frac{D_y}{D_z} \right)^2 R_{zz}. \quad (70)$$

Relacje te związać można ze śladem tensora \vec{R} w następujący sposób:

$$2k = R_{xx} + R_{yy} + R_{zz}, \quad (71)$$

co oznacza, iż poszczególne naprężenia normalne mają postać:

$$R_{xx} = \frac{D_x^2}{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2} 2k, \quad (72)$$

$$R_{yy} = \frac{D_y^2}{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2} 2k, \quad (73)$$

$$R_{zz} = \frac{D_z^2}{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2} 2k. \quad (74)$$

Związki na naprężenia normalne (72)÷(74) oraz naprężenia poboczne (65)÷(67) określają cały tensor Reynoldsa, w związku z czym mamy również określony wektor \vec{B} w równaniu (61).

Powyższy scenariusz *racjonalnej turbulencji* zezwala na eliminację szeregu fenomenologicznych domknięć i sprowadza modelowanie wyłącznie do wyznaczenia ewolucji energii turbulencji k .

5 Przepływ w kanale z uskokiem geometrycznym

Jako eksperyment referencyjny wybrano badania Eatona i Vogela [48] dla przepływu w kanale z uskokiem geometrycznym. Wyników obliczeń nie odnoszono bezpośrednio do eksperymentu, tylko do symulacji wykonanych standardowym dwu-równaniowym modelem turbulencji.

Do obliczenia składowych naprężeń turbulentnych w modelu Broszki, potrzebne jest dodatkowo zamodelowanie turbulentnej energii kinetycznej k . Aby dokonać najbardziej obiektywnego porównania z modelem k - ϵ przyjęto tą samą formę równania ewolucyjnego na k [50]:

$$\partial_t (\rho k) + (\rho k v_i)_{,i} = [\mu_{eff} k_{,i}]_{,i} - R_{i,j} v_{j,i} - \epsilon. \quad (75)$$

W równaniu tym R_{ij} oznacza tensor Reynoldsa, obliczany albo za pomocą lepkości turbulentnej (model k - ϵ) albo za pomocą formuły Broszko (65)÷(70). W modelu Broszko - dla prostoty - przyjęto funkcję algebraiczną $\epsilon = k^{3/2}/l_D$ wg [41], w modelu k - ϵ , wartość ϵ obliczana jest z klasycznego równania ewolucji.

W obu przypadkach, do obliczeń przyjęto współczynnik dyfuzyjności jako sumę lepkości molekularnej i turbulentnej [50]:

$$\mu_{eff} = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}, \quad (76)$$

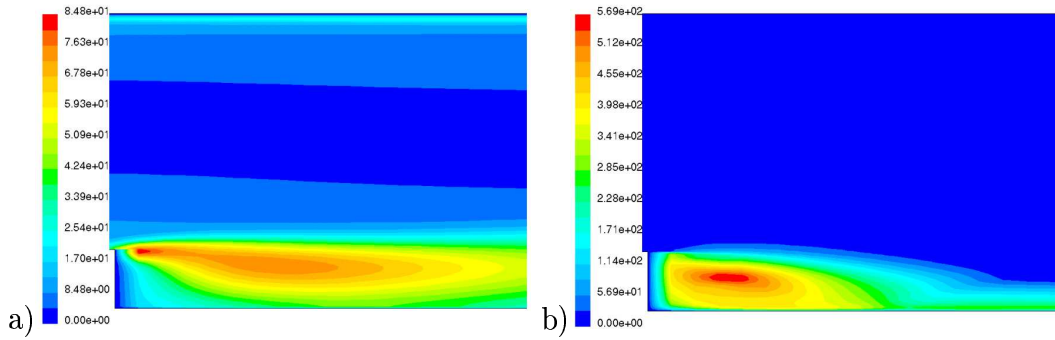
a człon opisujący produkcję k przyjmuje standardową postać [50],

$$R_{i,j} v_{j,i} = \mu_t d_{i,j}^2. \quad (77)$$

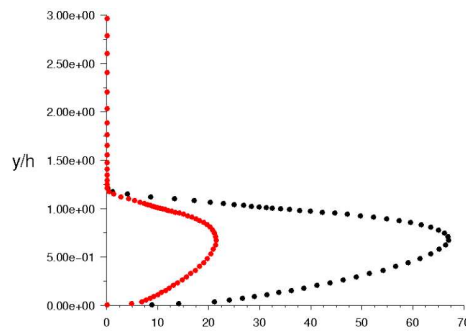
Zamodelowano energię kinetyczną turbulencji modelu Broszki, której produkcję obliczano w oparciu o składowe tensora naprężeń turbulentnych, przy założeniu na ściance wartości $k = 0$, oraz pominięciu równania na dyssypację energii kinetycznej. Rezultaty przedstawiono na Rysunkach 2÷5:

Otrzymano dodatkowo zbliżone profile prędkości w obszarach poza oderwaniem oraz niewielką zmianę strumienia masy. Stąd ogólny wniosek, iż model Broszko, jako model wrażliwy na sposób obliczania k , w tej wersji nadaje się do modelowania turbulencji objętościowej.

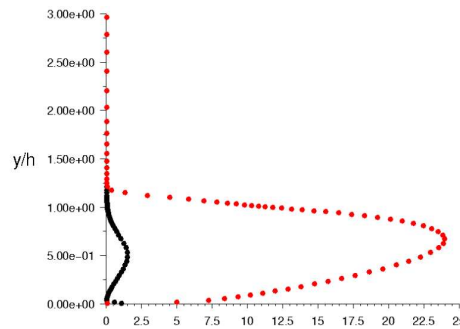
Model Broszki, współcześnie, ma dwa interesujące i ważne aspekty:



Rysunek 2: Dystrybucja energii kinetycznej turbulencji k za uskokiem wg modelu a) standardowy $k-\epsilon$, b) Broszko

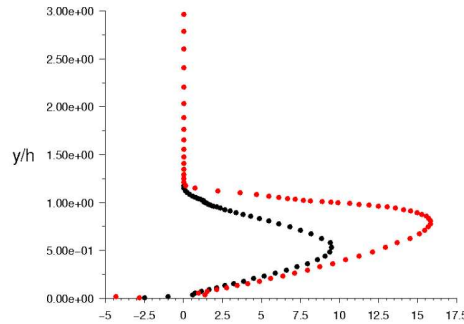


Rysunek 3: Porównanie naprężeń turbulentnych R_{xx} w wybranym przekroju wzdłuż wysokości kanału (kolor czerwony - wg standardowego modelu $k-\epsilon$ kolor czarny - wg modelu Broszko)



Rysunek 4: Porównanie naprężeń turbulentnych R_{yy} w wybranym przekroju wzdłuż wysokości kanału

1. Podaje ściśle analityczne formuły na składowe tensora Reynoldsa bez konieczności używania turbulentnego współczynnika lepkości,
2. Podaje ściłą formułę na $\text{div} \overleftrightarrow{R} = \vec{B}$ co oznacza, iż w obliczeniach numerycznych pozostają schematy obliczeń przepływów laminarnych, zaś obok siły



Rysunek 5: Porównanie naprężeń turbulentnych R_{xy} w wybranym przekroju wzdłuż wysokości kanału

masowej występuje lokalna siła \vec{B} .

Niestety, wadą modelu jest konieczność obliczania ewolucji parametru k rozumianego jako ślad z tensora \overleftrightarrow{R} (71). Powyższe fakty zezwalają zaliczyć model Broszki do grupy modeli jednorównaniowych. Inną wadą, natury metodologicznej, jest brak koncepcji modelowania turbulentnego strumienia masy i ciepła [49].

6 Podsumowanie

Nowoczesne wysoko-sprawne bloki energetyczne muszą być projektowane, sprawdzane i modernizowane przy pomocy zaawansowanych metod obliczeniowych numerycznej termomechaniki [45], [46], [47]. Właściwe modelowanie turbulentnego transportu masy, pędu i energii jest podstawowym wymogiem stawianym przed komercyjnymi kodami obliczeniowymi, stąd też posiadanie wiedzy na temat zakresu ważności modelu jest sprawą podstawową dla użytkownika. Stosowane dziś modele turbulencji nie mają znamion modeli uniwersalnych - przykładowo, nie rozwiązano w nich technicznie ważnego zagadnienia chropowatości ścianek, rodzaju materiałów ścianek i ich zmiany w trakcie procesu eksploatacji. Używane dziś modele nie mówią nic o wilgotności ścianki, zjawiskach absorpcji i naładowaniu elektrycznym w trakcie tarcia przepływu. Większość modeli oparta jest na doświadczeniach z przepływem wody - literatura poświęca mało miejsca fluktuacjom gęstości [31] i energii [44]. Prawie wcale nie dyskutuje się fluktuacji entropii właściwej i stopnia zapełnienia. Brak jest oceny modeli turbulencji RANS z punktu widzenia termodynamiki nierównowagowej [43]. Klasyczne podejście poprzez pola fluktuacji i technikę czasowego uśredniania, dla przypadku przepływu podlegającego przejściom fazowym, ma poważne mankamenty metodyczne i nie jest łatwe do analitycznego wyprowadzenia [40].

W tej sytuacji, w przekonaniu autorów, wciąż jest miejsce dla modelowania fenomenologicznego a prezentowany powyżej model Broszki jest dobrym przykładem modelu skonstruowanego o racjonalne przesłanki. Również i inne modele racjonalne, zrekonstruowane w niniejszej pracy (Reynolds, Nowożyłow, Więckowski, Sawicki) pokazują jak zbudować: model gradientowy, model z lokalną liczbą

Reynoldsa, model z wirowym transportem pędu i momentu pędu, model z konwekcyjną turbulencją. Nie trzeba dodawać, iż wszystkie prezentowane modele są spójne z termodynamiką nierównowagową czego nie można powiedzieć o tzw. modelu RANS.

Bibliografia

- [1] E. Mossotti *Lezioni di Meccanica Razionale*, Firenze, 1851
- [2] G.G. Stokes *On the theories of the internal friction of fluides in motion, and of equilibrium and motion of elastic solids*, Trans. Camb. Phil. Soc. 8, 287-319, 1845
- [3] W.J.M. Rankine *On the centrifugal theory of elasticity as applied to gasses and vapours*, Phil. Mag., 2, 509-542, 1851
- [4] F. Kucharzewski, Wł. Kluger *Wykład hydrauliki wraz z teorią machin wodnych poprzedzony wiadomościami wstępnymi z mechaniki analitycznej ciał płynnych*, Towarzystwo Naukowej Pomocy i Nauk Ścisłych, Paryż, 1873
- [5] J. Boussinesq *Theorie de l'ecoulement tourbillant*, Mem. Pres. Acad. Sci. Paris, 23, 46-50, 1877
- [6] W.M. Hicks *Quaternion investigations on strains and fluid motion*, The Quart. Jour. Pure Appl. Math. 14, 271-292, 1877
- [7] J. G. Bucher *On the quaternion forms of some general propositions in fluid motion*, Proc. London. Math. Soc. 8, 174-183, 1878
- [8] J. Clark-Maxwell *On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 170, 231-256, 1879.
- [9] M.J.M. Hill *Some properties of the equations of hydrodynamics*, Quart. J. Math. 17, 1-20, 168-174, 1881
- [10] W. Thomson *On the propagation of laminar motion through a turbulently moving inviscid liquid*, Phil. Mag. 24, 342-353, 1882
- [11] O. Reynolds *An experimental investigation of circumstance which determine whether the motion of water shall be direct or sinous and the law of resistance in pararel channels*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 174, 935-982, 1883
- [12] O. Reynolds *On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of criterion*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A186, 123-164, 1885
- [13] J.W. Gibbs *Quaternions and the Ausdehnungslehre*, Nature, 45, 79-82, 1891
- [14] M.P. Appell *Sur les e'quations de l'Hydrodynamique et la the'orie des tourbillous*, J. Math. Pures et Appl. 5, 5-16, 1897
- [15] O. Reynolds *The Sub-Mechanics of the Universe*, Papers, Vol III, 1-251, 1903
- [16] H. Blasius *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*, Z. Math. U. Phys. 56, 1-45, 1908

- [17] E.T. Stanton, R.T. Glazebrook *Similarity of motion in relation to the surface friction of fluids*, Phil. Trans. Roy. Soc London, 214, 199-221+3 tabele, 1914
- [18] Th. Kármán *Über laminare und turbulente Reibung*, ZAMM, 1, 233-248, 1921
- [19] L. Prandtl *Über die ausgebildete Turbulenz*, ZAMM, 5, 136-139, 1925
- [20] L. Hopf *Zähe Flüssigkeiten*, Hand. Der Physik, TVII, 232-463, Berlin, 1927
- [21] G.I. Taylor *Statistical theory of turbulence*, Proc. Royal. Soc. London, A151, 421-478, 1935
- [22] M. Broszko *On the problem of turbulence and on the foundation of hydrodynamics*, Ann. L'Acad. Polonaise Sci. Tech. 7, 75-98, 1946
- [23] C. Truesdell *On the transfer of energy in continuous media*, Phys Rev. 73, 513-515, 1948
- [24] J. Rotta *Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz*, Zeits. f. Physik, 129. 547-572, 1951
- [25] M. Broszko *O podstawach hydrodynamiki racjonalnej i o jej weryfikacji*, Arch. Hydrodynamiki, 2, 7-25, 1955
- [26] J. Więckowski *O równaniu ruchu cieczy rzeczywistych*, Arch. Hydrodynamiki, 2, 191-208, 1955
- [27] E.R. Van Driest *On turbulent flow near a wall*, J. Aero. Sci. 23, 1007-1011, 1956
- [28] E. Burka *Uwagi wyjaśniające do racjonalnej teorii ruchu burzliwego i jej zastosowań*, Arch. Hydrodynamiki, 4, 95-133, 1957
- [29] J. Bonder, S. Drobot *Uwagi krytyczne o tzw. "racjonalnej" teorii ruchu burzliwego i o jej zastosowaniach*, Arch. Hydrodynamiki, 4, 123-131, 1957
- [30] W. Squire *A unified theory of turbulent flow*, Appl. Sci. Res. A8, 158-168, 1958
- [31] A. Favre *Équations des gas turbulents compressibles*, Journal de Mecanique, 4, 359-390, 391-421, 1965
- [32] M. Wolfshtein *On the length scale of turbulence equation*, Israel J. Technol., 8, 87-99, 1970
- [33] C. Truesdell *Sześć wykładów nowoczesnej filozofii przyrody*, PWN, 1-140, 1969
- [34] V.V. Nowożyłow *O zavisimosti turbulentnoj viazkosti ot molekularnoj*, Dok. Akad. Nauk SSSR, t 258, 1331-1335, 1988

- [35] B.E. Launder, D.B. Spalding *Mathematical Models of Turbulence*, Academic Press, NY, 1972
- [36] J. Sawicki *Zarys koncepcji konwekcyjnego modelu burzliwości*, ZN Pol. Śląskiej, Energetyka, z88, 131-136, 1984
- [37] C.G. Speziale *Turbulence modeling in non-inertial frames of reference*, Theor. & Comp. Fluid Dyn., 1, 3-19, 1989
- [38] D. Jackson, J. Badur *Remarks on "Sub-mechanics of Universum" by Osborne Reynolds*, Transaction of IFFM, 99, 127-150, 1995
- [39] J.W. Elsner, S. Drobnik *Metrologia Turbulencji Przepływów*, Ossolineum, Wrocław, 1995
- [40] J. Badur, Z. Bilicki *Some problems of turbulence in two-phase flow*, J. Turbulence, 4, 33-54, 1998
- [41] C. Speziale, R. M.C. So *Turbulence modeling and simulation*, [in:] The Handbook of Fluids Dynamics, Springer, 14.1-14.111, 1998
- [42] J. Badur *Termodynamika Racjonalna Truesdella*, [w:] Współczesne Kierunki w Termodynamice, ed. Z. Bilicki, J. Mikielwicz, S. Sieniutycz, 81-104, 2001
- [43] S. Sieniutycz *Podejście wariacyjne w termodynamice nierównowagowej*, [w:] Współczesne Kierunki w Termodynamice, ed. Z. Bilicki, J. Mikielwicz, S. Sieniutycz, 118-150, 2001
- [44] M. Karcz *Równania transportu turbulencji termicznej*, Opr. Wewn. IMP PAN 2089/2002, 1-21, 2002
- [45] T.J. Chmielniak *Maszyny Przepływowe - Kierunki Badań*, Referat Zamawiany na XX Zjeździe Termodynamików, Kołobrzeg, 1-22, 1996
- [46] R. Puzyrewski *14 wykładów teorii stopnia maszyny wirnikowej*, Wyd. Pol. Gdańskiej, Gdańsk, 1998
- [47] W.N. Dawes *Current & future developments in turbomachinery CFD*, 2nd European Conf. Turbomachinery - Fluid Dynamics and Thermodynamics, Antwerpen, 1997
- [48] J.C. Vogel, J.K. Eaton *Combined heat transfer and fluid dynamic measurements downstream of a backward-facing step*, ASME Journal of Heat Transfer, 107, 922-929, 1985
- [49] M. Karcz *Implementacja modeli turbulentnej wymiany ciepła*, Opr. Wew. IMP PAN, Gdańsk, 2043/2002, 1-28, 2002
- [50] M. Karcz, J. Badur *Numeryczna implementacja modelu turbulencji Broszko*, XV Krajowa Konferencja Mechaniki Płynów, Augustów, 2002